Kapitel 14

Lineare Abbildungen

1. Ja, die Matrixdarstellung ist $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2. T nein, K ja (folgt aus Satz 12.14).

3. Mit Satz 14.7, wir erhalten $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Bezüglich der kanonischen Basis erhalten wir
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Wenn wir nach Satz 13.8 die jeweiligen Basistransformationsmatrizen bilden und entsprechend ausmultiplizieren, dann erhalten wir bezüglich den angegebenen Basen die Matrixdarstellung
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Wir erhalten die Ergebnisse $x^2 + 3x + C$, $\sin x + C$, $x + C$.

6. Für die Matrixelemente gilt $a_{12} = 1, a_{23} = 2, \ldots, a_{k(k+1)} = k, \ldots, a_{(n-1)n} = n - 1$, alle anderen Elemente sind Null.

7. Die Summe der darstellenden Matrizen.

8. Die Matrizen sind $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

9. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

10. Die Spaltenvektoren müssen die Länge 1 haben, also gibt es Winkel ϕ und ψ mit $A_{11} = \cos\phi$, $A_{21} = \sin\phi$, $A_{12} = \sin\psi$, $A_{22} = \cos\psi$. Mit entsprechenden Additionstheoremen für die trigonometrischen Funktionen kommen wir auf die erste angegebene Form. Die andere folgt analog.

11. Es ist
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

12. Wir müssen die Matrix A ablesen und diagonalisieren. Für die erste Form ergibt sich so die Matrix $diag(3,1)$.

13. $diag(2,4), diag(-50,-3,25), diag(0,3,3), diag(-25,-25,25,25)$.

14. $diag(-1,1,1)$.

15. Das Skalarprodukt ist linear, und damit auch F. Es werden Basisvektoren gesucht, für die $F(\mathbf{x}_1) = -\mathbf{x}_1, F(\mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_2, F(\mathbf{x}_3) = \mathbf{x}_3$ gilt. Eine Lösung ist beispielsweise $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}, \mathbf{x}_2 = (1,1,0)^T, \mathbf{x}_3 = (-1,1,1)^T$.

16. Der Vektor $\mathbf{v}$ ist ein Eigenvektor der Abbildung. Jeder zu $\mathbf{v}$ orthogonale Vektor wird auf $\mathbf{0}$ abgebildet. Es gibt $n-1$ verschiedene, zu $\mathbf{v}$ orthogonale und linear unabhängige Vektoren, also ist die Abbildung diagonalisierbar.

17. Der Ausdruck ergibt die Matrix
$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$
sie ist wie gefordert zu D ähnlich.

18. Einsetzen ...

19. Die Basisfunktionen in W sind bereits Eigenvektoren zu den Eigenwerten $1, -1$ und 2.

20. Wenn A und B diagonalisierbar sind, dann können wir die Matrix P bilden mit den Eigenvektoren als Spalten. Sind diese gleich, dann gilt $AB = PD_\lambda P^{-1} PD_\mu P^{-1} = BA$.

21. Alle Eigenwerte sind Null. Nehmen wir das Gegenteil an, dann existiert ein $\lambda \neq 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ mit $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ und $A^n\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ein Widerspruch.

22. Wenn A die Singulärwertzerlegung UDV besitzt, dann gilt $AA^T = UD^2U^T$ und $A^TA = V^TD^2V$. Beide Matrizen sind diagonalisierbar, die Quadrate der singulären Werten von A sind jeweils die Eigenwerte.

23. Wenn A die Singulärwertzerlegung UDV besitzt, dann gilt $A^TA = V^TD^2V$. Die Matrix $P = V^TDV$ erfüllt die gegebene Gleichung.