Kapitel 7

Algebra

1. Das neutrale Element ist (e_1, e_2), die inversen Elemente sind (x^{-1}, y^{-1}).
2. Angenommen, es gibt zwei Elemente $b \neq c$ mit $a \circ b = a \circ c \Rightarrow b = c$. Dann gilt
$$b = a^{-1} \circ (a \circ b) = a^{-1} \circ (a \circ c) = c,$$
ein Widerspruch.
3. Wir müssen das neutrale Element wählen und für die restlichen Elemente entscheiden, wie die inversen Elemente aussehen. In jeder Zeile und jeder Spalte muss jedes Element genau einmal auftreten. Bleibt sowohl für $n = 2$ als auch für $n = 3$ genau eine Verknüpfungstafel übrig.
4. U_1, U_2 sind Untergruppen, in U_3 ist weder das neutrale Element enthalten noch ist die Addition abgeschlossen.
5. $N(f) = \emptyset, R(f) = (0, \infty)$.
6. Es ist $N(\gamma_x) = \{e\}$, das Urbild für ein $m \in M$ ist $n = x^{-1} \circ m \circ x$. Die Identität ist eine Konjungation. Die Abgeschlossenheit folgt aus
$$\gamma_x \circ \gamma_y(n) = x \circ y \circ n \circ y^{-1} \circ x^{-1} = \gamma_{x \circ y}(n).$$
7. $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$ ist isomorph zu $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$ mit
$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \\
\sigma_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \\
\sigma_3 = \sigma_2^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \\
\sigma_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \\
\sigma_5 = \sigma_4^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$
8. Alle Permutationen, die *eine* Zahl unverändert lassen.
9. Folgt aus dem Satz von Lagrange und Satz 7.17.

10. S_3 ist nicht abelsch. Wir müssen die Untergruppen suchen, die Normalteiler darstellen. Es bleibt die Untergruppe $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

    Die Faktorgruppe hat dann 2 Elemente, $[a] = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, [b] = \{\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$. Es gilt im Wesentlichen $A(\sigma_i) = [a], 1 \leq i \leq 3$ und $A(\sigma_i) = [b], 4 \leq i \leq 6$.

11. Nachrechnen!

12. In $\mathbb{Z}_7$ hat die Gleichung die beiden Lösungen $x = 3, x = 4$. In $\mathbb{Z}_5$ existiert keine Lösung.

13. Die Tabellen definieren zwei abelsche Gruppen, bleibt, die Distributivgesetze zu überprüfen. Es gilt $c \times (c \diamond d) = c \neq c \times c \diamond c \times d = a$.

14. Über $\mathbb{R} : x + x^2 + 2x^4 + x^6 + 2x^7 + x^9 + x^{10}$, über $K_2 : x + x^2 + x^6 + x^9 + x^{10}$.

15. $r_1(x) = x^2, s_1(x) = -1 + x^2$ und $r_2(x) = -8 + 2x, s_2(x) = -336 + 48 + 9x^2$.

16. $x = 4$ ist Nullstelle ...

17. Nur über $\mathbb{C}$ zerfällt das Polynom in Linearfaktoren:

$$p(x) = (x-2)(x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2}).$$

18. Die dritten Einheitswurzeln von 1 in $\mathbb{C}$ sind $z_1 = 1, z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}, z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$.

19. $\begin{pmatrix} 0 & -30 \\ 12 & -2 \end{pmatrix}$, in $\mathbb{Z} : 20$, in $\mathbb{Z}_5 : 0$, in $\mathbb{Z}_6 : 2$.

20. Nachrechnen, es gilt immer $x^3 = x$.

21. Die Annahme, dass es zwei verschiedene gibt führt zum Widerspruch, so wie schon bei der Eindeutigkeit des inversen Elements in Gruppen.

22. Nachrechnen!