Mathematik für Informatiker
Aufgaben zum Buch

Manfred Brill

März 2003

Kapitel 1

Aussagenlogik

1. Bestimmen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen und die verwendeten Aussagenverknüpfungen:
   - „Der Hamster und der Wellensittich können fliegen“
   - „Am Himmel sind Wolken oder es scheint die Sonne“
   - „Eis ist nicht flüssig“
2. Bestimmen Sie die Wahrheitstafel für $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ und $p \Rightarrow (q \Rightarrow (r \vee \neg p))$.
3. Ist der Ausdruck $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$ eine Tautologie?

Tabelle 1.1: Die Wahrheitstafel einer Wechselschaltung

p	q	x
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

4. Serien- und Parallelschaltung elektrischer Bauelemente entsprechen den Aussagen $p \wedge q$ bzw. $p \vee q$, wenn p und q solche Bauelemente sind. Für eine Wechselschaltung könnte die Wahrheitstafel 1.1 stehen. Wie lautet der Ausdruck x, wenn Sie nur die Operatoren $\wedge, \vee$ und $\neg$ verwenden?

Tabelle 1.2: Zwei Schaltungen zur Übung

p	q	r	a	b
f	f	f	f	w
f	f	w	w	w
f	w	f	f	w
f	w	w	f	f
w	f	f	f	f
w	f	w	w	f
w	w	f	f	f
w	w	w	w	f

5. Die Wahrheitstafel 1.2 enthält die vorgegebenen Wahrheitsverläufe für zwei logische Schaltungen a und b. Schreiben Sie beide logische Ausdrücke in konjunktiver und disjunktiver Normalform und bestimmen Sie mit Hilfe eines Karnaugh-Diagramms eine SOPE-Darstellung!

6. Schreiben Sie $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$ in disjunktiver und konjunktiver Normalform und stellen Sie die SOPE-Darstellung auf!

7. Bestimmen Sie eine SOPE–Darstellung für den logischen Ausdruck

$$(\neg x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z).$$

8. Eine Öldruckkontrolle soll für folgende zwei Fälle Gefahr signalisieren: der Motor läuft, es ist aber kein Öldruck vorhanden, oder der Motor läuft und die Öltemperatur ist zu hoch. Entwickeln Sie eine SOPE–Darstellung für einen logischen Ausdruck, der diese Kontrolle realisiert!

9. In einem Auto soll ein Warnton den Fahrer darauf aufmerksam machen, dass das Licht eingeschaltet ist, obwohl der Zündschlüssel abgezogen und die Tür bereits geöffnet wurden. Entwerfen Sie eine Schaltung, die dieses Problem löst!

Tabelle 1.3: Die Eingangsgrößen des Displays

A	B	C	D	Ziffer
f	f	f	f	0
f	f	f	w	1
f	f	w	f	2
f	f	w	w	3
f	w	f	f	4
f	w	f	w	5
f	w	w	f	6
f	w	w	w	7
w	f	f	f	8
w	f	f	w	9

10. Mit dem BDC-7-Segment-Decoder in Abbildung 1.1 können die Ziffern 0 bis 9 durch Signale auf den Leitungen A, B, C und D dargestellt werden. Stellen Sie einen logischen Ausdruck auf, der die Darstellung der Ziffern ermöglicht und die Eingaben der Wahrheitstafel 1.3 verwendet!

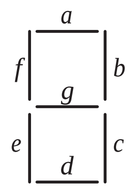

Abbildung 1.1: Ein 7-Segment-Decoder

11. Suchen Sie dieses Buch bei der Online-Buchhandlung Ihrer Wahl, dabei versuchen Sie durch Einsatz von Aussagenlogik eine möglichst kleine Treffermenge zu erzielen!

12. Beweisen Sie, dass $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow q$ eine Tautologie ist!

13. Beweisen Sie die Aussage $a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$.

14. Beweisen Sie durch einen direkten und einen indirekten Beweis, dass das Produkt zweier ungerader Zahlen ungerade ist.

15. Beweisen Sie $2^n < n!$ für $n > 3$.

16. Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Aussagen

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ und } 2 + 6 + 10 + \cdots + (4n - 2) = 2n^2.$$

Kapitel 2

Zahlen

1. Beweisen Sie, dass $\sqrt{3}$ irrational ist! Wenn Sie die gleiche Beweistechnik für $\sqrt{4}$ einsetzen, muss der Beweis abbrechen – warum?
2. Berechnen Sie für die Zahlen $x_1 = 5, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 2, y_1 = 1, y_2 = 4, y_3 = 3$ und $y_4 = 1$
$$\sum_{i=1}^{4} x_i, \prod_{i=1}^{4} x_i, \sum_{i=1}^{4} x_i y_i \text{ und } \prod_{i=1}^{4} x_i y_i.$$
3. Berechnen Sie
$$\sum_{i=1}^{10} \tfrac{1}{i}, \sum_{i=1}^{10}(i+3) \text{ und } \prod_{i=1}^{10}(6i-2).$$
4. Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung von
$$(1+i)^{\frac{1}{2}}, (-8+i8\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}, (i)^{\frac{1}{3}}.$$
5. Berechnen Sie die 5-ten Einheitswurzeln und stellen Sie diese in der komplexen Zahlenebene dar.
6. Warum kann das Konstruktionsverfahren für die Dezimalbruchdarstellung einer reellen Zahl nie zu der Situation führen, dass ab irgendeiner Nachkommastelle alle Koeffizienten d_j gleich 0 werden?
7. Wenden Sie das Divisionsverfahren auf die natürliche Zahl $n = 674$ für die verschiedenen Basen $b = 5$ und $b = 2$ an!
8. Wandeln Sie die Zahl $(745)_8$ in das System zur Basis $b = 3$ um!
9. Formal kann mit Darstellungen zu einer Basis b gerechnet werden, wie wir das vom Dezimalsystem gewohnt sind. Prüfen Sie dies an Hand der Beispiele $(543)_6 + (242)_6 = (1225)_6$, $(213)_6 - (132)_6 = (41)_6$ und $(153)_6 \cdot (23)_6 = (4443)_6$ nach!
10. Berechnen Sie die Entwicklung zur Basis 7 von $\frac{1}{5}$ und von $\frac{2}{5}$ zur Basis 2!
11. Wandeln Sie die Dezimalzahlen $1, 0, -0, 5, -6, 625$ und -3456 in das IEC single-Format um!
12. Welche Dezimalzahlen werden durch die IEC single-Format-Bitmuster

1	10 000 000	10 000 000 000 000 000 000 000
1	10 100 000	00 100 000 000 000 000 000 000

dargestellt?

13. Wie viele Zahlen enthält ein normalisiertes Gleitpunkt-Zahlensystem mit den Parametern b, p, e_{min} und e_{max}?

14. Wie sieht die größte und kleinste darstellbare Gleitpunktzahl in einem normalisierten System mit den Parametern b, p, e_{min} und e_{max} aus? Welche Zahlen ergeben sich für die IEC-Grundformate?

15. Gegeben sind die beiden Rekursionen

$$f_0 = 1 - \frac{1}{e}, f_{k+1} = 1 - (k+1) f_k$$

und

$$G_N \text{ gegeben}, N > k, g_k = \frac{1 - g_{k+1}}{k+1}.$$

Die Rekursion für g_k erhalten wir durch Auflösen der Rekursion für f nach f_k. Berechnen Sie f_{30} mit dem Computer und vergleichen Sie das Ergebnis mit g_{30}. Dabei verwenden Sie für g_{50} einen beliebigen Startwert zwischen -10^{10} und 10^{10}!

Kapitel 3

Zahlentheorie

1. Berechnen Sie die Primzahlfaktorisierung der natürlichen Zahlen 7 777, 1 001 und 10 121 804.
2. Alle natürlichen Zahlen bis 10 000 enthalten in ihrer Primzahlfaktorisierung eine Primzahl, die kleiner als 100 ist. Ist diese Aussage richtig?
3. Bestimmen Sie alle Primzahlen kleiner als 100, die durch $n^2 + 1$ mit einer natürlichen Zahl n dargestellt werden können.
4. Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(144, 89)$ mit dem Euklidischen Algorithmus und mit der rekursiven Methode!
5. Lösen Sie die Gleichungen $13x + 19y = 1\,000$ und $6930x + 1098y = 18$.
6. Sind die Zahlen 45, 49 und 50 als $25x + 35y$ darstellbar?
7. Stellen Sie die Verknüpfungstabellen für $\odot$ und $\oplus$ für $m = 3$ und $m = 6$ auf!
8. Beweisen Sie die 3er und die 9er Regel: Eine Zahl n ist genau dann durch 3 bzw. 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 bzw. 9 teilbar ist!
9. Bestimmen Sie den Rest von 3^{15} und 15^{83} bei der Division durch 13.
10. Stellen Sie eine Hashtabelle der Länge $n = 13$ auf, dabei verwenden Sie als Schlüssel für die Speicherung der Daten von Personen die Monatsnamen Januar, Februar bis Dezember. Als numerische Codierung verwenden Sie die Ordnungszahl des ersten Buchstaben des Monats im Alphabet, also $ord(A) = 1, \ldots, ord(Z) = 26$.
11. Berechnen Sie die Prüfziffern und ergänzen den Ausdruck zur gültigen ISBN für $3 - 446 - 21368$, $3 - 451 - 18611$ und $3 - 528 - 27268$!
12. Die Pharmazentralnummer ist analog zur ISBN eine siebenstellige Zahlenfolge; die letzte Ziffer dient als Prüfziffer. Die Prüfziffer wird berechnet durch Multiplikation von links der ersten Stelle mit 2, der zweiten mit 3 und so weiter. Der Rest, den die Summe dieser Produkte bei der Division mit 11 lässt ist die Prüfziffer. Weisen Sie nach, dass die Ziffern 1885822 eine korrekte Pharmazentralnummer bilden!
13. Weisen Sie nach, dass die Pharmazentralnummern aus der letzten Aufgabe Drehfehler und Verwechslungen einer Ziffer aufdeckt!
14. Stellen die Ziffernfolgen

    9783411040117, 9783446213684, 4105020000118, 4011800104009

    korrekte EANs dar?

15. Führen Sie die Tausch–Chiffre durch mit $(5, 21)$ und $(15, 7)$ für die Nachricht „Mathematik für Informatiker"!

16. Wie können Sie eine Tausch-Chiffre mit Schlüssel (s, t) angreifen, wenn Sie bereits für zwei Buchstabenpaare die Zuordnung kennen? Führen Sie das gefundene Verfahren durch für den Geheimtext „zdswvmc" und das Paar $c \mapsto d, h \mapsto s$!

17. Für das Teilmengen–Summenproblem gibt es einen Empfänger mit privatem Schlüssel

$$1, 2, 5, 11, 32, 87, 141, w = 901, m = 1234$$

und öffentlichem Schlüssel

$$901, 568, 803, 39, 450, 645, 1173.$$

Ver- und entschlüsseln Sie die Nachricht „Mathematik für Informatiker"!

18. Bestimmen Sie eine Zahl s mit $s^2 \equiv 34 \bmod 55$ und ein n mit $7^n \equiv 10 \bmod 31$.

19. Übertragen Sie für den öffentlichen Schlüssel $n = 34\,571 = 181 \cdot 191$, $e = 7\,901$ und für den privaten Schlüssel $d = 11\,501$ die Nachricht „Mathematik für Informatiker"!

20. Wie können Sie den RSA-Ansatz nutzen, um Authentizität zu gewährleisten, also eine digitale Unterschrift zu generieren?

Kapitel 4

Relationen und Abbildungen

1. Zeichnen Sie einen Zahlenstrahl und tragen Sie die Intervalle $(0;1)$, $[0;1)$ und $(0,1]$ auf!
2. Legen Sie eine Reihenfolge für die Beschreibung der Menge U eines Skatspiels fest. Beschreiben Sie mit Hilfe der Charakteristik eine Verteilung der 32 Karten auf drei Stapel mit 10 Karten und einen Stock mit 2 Karten!
3. Vereinfachen Sie den Ausdruck $(S^c \cap T^c)^c \cap (S^c \cap T^c)$!
4. Sind die Implikationen $S \cup T = S \cup V \Rightarrow T = V$ und $S \cap T = S \cap V \Rightarrow T = V$ wahr?
5. Bestimmen Sie für $S = \{1,2\}$, $T = \{a,b\}$ und $V = \{b,c\}$ die folgenden Mengen: $S \times (T \cap V)$, $(S \times T) \cup (S \times V)$ und $(S \times T) \cap (S \times V)$!
6. In einem Bahnbetriebswerk gibt es drei Zugwagen $Z = \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ und zwei Anhänger $A = \{A_1, A_2\}$ zur Bildung von Regionalzügen. Geben Sie die möglichen Züge in der Form des kartesischen Produkts $Z \times A$ an!
7. Stellen Sie die Relation
$$R = \{(1,2), (1,5), (1,6), (2,2), (2,4), (3,4), (3,6), (4,6), (5,5)\}$$
auf $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ als Tabelle und als Pfeildiagramm dar!
8. Ist für zwei Relationen R_1 und R_2 die Gleichung $R_1 \circ R_2 = \emptyset$ möglich?
9. Bilden Sie für $R_1 = \{(a,b), (a,c)\}$ und $R_2 = \{(b,d), (c,a)\}$ die Kompositionen $R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$ und $R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$!
10. Ist für reflexive Relationen R_1, R_2 die Komposition $R_1 \circ R_2$ reflexiv?
11. Weisen Sie nach, dass für reflexive Relationen $R \subseteq R \circ R$ erfüllt ist!
12. Ist die Aussage $R \circ R \subseteq R$ äquivalent zur Definition einer transitiven Relation?
13. Geben Sie sämtliche Partitionen der Menge $M = \{9, 12, 21\}$ an. Weisen Sie nach, dass $R = \{(x,y) \in M^2 \mid x \text{ hat die gleiche Quersumme wie } y\}$ eine Äquivalenzrelation ist und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen!

14. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen, wenn M die Menge aller Menschen und W die Menge aller Wassertürme in Deutschland darstellt?

$$\begin{aligned} R_m &= \{(x,y) \in M^2 \mid x \text{ ist am gleichen Tag wie } y \text{ geboren}\}, \\ R_{10} &= \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n+m=10\}, \\ R_w &= \{(x,y) \in W^2 \mid x \text{ ist höher als } y\}. \end{aligned}$$

15. Beweisen Sie, dass für eine strikte Teilordnung S durch

$$SO = \{(x,y) \in S \mid (x,y) \in S \vee x = y\}$$

eine Teilordnung definiert wird.

16. Weisen Sie nach, dass „$\leq_1$“ eine nicht totale Teilordnung ist und „$\leq_2$“ eine Ordnung darstellt. Dabei ist

$$\begin{aligned} (k,l) \leq_1 (m,n) &\Leftrightarrow k \leq m \wedge l \leq n \\ (k,l) \leq_2 (m,n) &\Leftrightarrow l < n \vee (k \leq m \wedge l = n). \end{aligned}$$

17. Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$

$$x \sim y \Leftrightarrow (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R$$

eine Äquivalenzrelation ist. Zeigen Sie, dass die Menge der Äquivalenzklassen durch

$$R[x] \leq R[y] \Leftrightarrow (x,y) \in R$$

teilgeordnet ist.

18. Untersuchen Sie die Abbildung $f:\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(1) = 1$ und

$$f(n+1) = \begin{cases} \frac{f(n)}{2} & \text{für gerades } f(n) \\ 3f(n) - 7 & \text{für ungerades } f(n) \end{cases}$$

auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität!

19. Bestimmen Sie für die reellen Funktionen $f(x) = x+1$, $g(x) = 2x$ und $h(x) = x^2$ die Verkettungen $f \circ g$, $f \circ h$, $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ f$ und $h \circ g$!

20. Beweisen Sie, dass für invertierbare $f \subseteq M \times N$ und $g \subseteq N \times P$ die Gleichung $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ gilt.

21. Stellen Sie alle Abbildungen $f:\ \{0,1\} \to \{0,1\}$ als Wertetabelle dar!

22. Ist die Abbildung $f:\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(m,n) = m + \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)$$

eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}^2$ und $\mathbb{N}$?

23. Weisen Sie nach, dass die Intervalle $[0,1]$, $[-1,1]$ und $[a,b]$ mit $a < b$ alle die gleiche Kardinalzahl besitzen!

24. Beweisen Sie $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$!

25. Beschreiben Sie das Ergebnis der Operation R_1 MINUS $(R_1$ MINUS $R_2)$ durch Mengenoperationen!

26. Beweisen Sie, dass die Division durch die Operatoren MINUS und TIMES darzustellen ist:

$$R_1 \text{ DIVIDEBY } R_2 = R_1[X] \text{ MINUS } ((R_1[X] \text{ TIMES } R_2) \text{ MINUS } R_1)[X]$$

Kapitel 5

Matrizen und lineare Gleichungssysteme

1. Berechnen Sie die Produkte $(AB)C$ und $A(BC)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Für reelle Zahlen gilt die Kürzungsregel: Aus $ab = ac$ und $a \neq 0$ folgt $b = c$, und aus $ad = 0$ folgt $a = 0 \vee d = 0$. Gelten diese Regeln für die Matrix-Arithmetik?
3. Weisen Sie nach, dass das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen wieder eine obere Dreiecksmatrix ist!
4. Eine Matrix ist *schiefsymmetrisch*, wenn $A^T = -A$ ist. Weisen Sie nach:
5.
6. Wenn A schiefsymmetrisch und invertierbar ist, dann ist A^{-1} schiefsymmetrisch.
7. Mit A und B sind auch die Matrizen A^T, $A + B$, $A - B$ und λA schiefsymmetrisch.
8. Bestimmen Sie in der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} a & b & c & -2 \\ c & a & b & 8 \\ b & c & a & 0 \end{pmatrix}$$

die Koeffizienten a, b und c so, dass das zugehörige Gleichungssystem genau die Lösung $x_1 = 1, x_2 = -1$ und $x_3 = 2$ besitzt!

9. Bestimmen Sie die Koeffizienten des kubischen Polynoms $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ so, dass $p(-1) = 0, p(1) = 2, p(2) = 3, p(3) = 12$ erfüllt sind!
10. Bestimmen Sie die Elementarmatrizen E_1, E_2, E_3 und E_4 mit

$$E_1A = B, E_2B = A$$
$$E_3A = C, E_4C = A$$

für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

11. Bestimmen Sie (wenn möglich) die Inversen der Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

12. Weisen Sie nach, dass für eine quadratische und invertierbare Matrix A auch A^2 invertierbar ist mit $A^{-1} = A(A^2)^{-1}$!

13. Ist A eine $n \times n$ Matrix und Q eine invertierbare $n \times n$ Matrix. Beweisen Sie: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung $\Leftrightarrow$ $(QA)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung.

14. Bestimmen Sie die LU-Zerlegung der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei soll während der Gauß-Elimination von B die erste und die dritte Zeile sowie die zweite und vierte Zeile vertauscht werden. Berechnen Sie mit der Zerlegung die Lösung des Gleichungssystems $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit der rechten Seite $\mathbf{b} = (1\ 0\ 0\ 1)^T$.

15. Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

16. Berechnen Sie die Determinante von A^{-1} für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

17. Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A^{25} für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

19. Weisen Sie nach, dass eine 2×2 Matrix A genau dann zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist, wenn $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} > 0$ erfüllt ist.

20. Die Fibonacci-Folge ist

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} \\ &= F^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

definiert. Suchen Sie eine zu F ähnliche Diagonalmatrix und stellen Sie damit die Fibonacci-Folge dar!

Kapitel 6

Kombinatorik

1. Auf wie viele Arten können Sie aus 9 deutsch-, 3 englisch- und 11 französischsprachigen Büchern zwei verschiedensprachige auswählen?

2. Auf wie viele Arten können Sie zwei Felder eines Schachbretts auswählen, die in verschiedenen Zeilen und Spalten liegen?

3. Zeigen Sie, dass für $M = \{1, 2, \ldots 99, 100\}$ und L eine Teilmenge mit $|L| = 55$, dass L zwei Zahlen a, b enthält mit $a - b = 9$.

4. Auf wie viele Arten können Sie ein Skatspiel mit 32 Karten mischen?

5. Ein Passwort besteht aus zwei Buchstaben und vier Ziffern, wobei die Ziffern, aber nicht die Buchstaben mehrfach auftreten dürfen. Klein- und Großschreibung ist als signifikant anzusehen. Wie viele Passwörter können Sie bilden?

6. Beweisen Sie die Gleichungen

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1},$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}.$$

7. Beweisen Sie, dass für eine endliche Menge die Anzahl der Teilmengen mit gerader Anzahl gleich der Anzahl der Teilmengen mit ungerader Anzahl ist!

8. Bei einem Tennisdoppelturnier nehmen $4n$ Spieler teil, es stehen n Tennisplätze zur Verfügung. Jeder Spieler benötigt einen festen Doppelpartner, jedes Paar ein anderes Paar als Gegner. Auf wie viele Arten können Sie die Wahl von Partner und Gegner treffen?

9. Angenommen, 60% Prozent der Professorinnen und Professoren eines Informatik-Fachbereichs geben als Lieblingsprogrammiersprache C++ an, 65% Java und 20% Smalltalk. 45% programmieren in jeweils zwei der Sprachen. Wie viel Prozent programmieren in allen drei Sprachen?

10. Multiplizieren Sie $(1 + x + x^2 + x^3)^3$ aus und vergleichen Sie die Koeffizienten mit $\binom{n+k-1}{k}$.

11. Auf wie viele Arten können Sie 24 Bücher auf 5 Personen verteilen, wenn zwei von ihnen 6 und die anderen 4 Bücher erhalten sollen?

12. Wie viele 10-stellige Dezimalzahlen enthalten die Ziffern 2 und 5, aber nicht 0, 1 oder 9?

13. Verwenden Sie die exponentiell erzeugende Funktion für die Bestimmung der Permutationen mit Wiederholung aus der Menge $\{x_1, x_2, x_3\}$, wenn das Auftreten der Elemente den folgenden Einschränkungen unterliegen soll:

$$\begin{array}{ll} x_1: & 0, 1 \text{ oder } 3 \text{ mal} \\ x_2: & 1 \text{ oder } 2 \text{ mal} \\ x_3: & \text{genau } 1 \text{ mal} \end{array}$$

14. Berechnen Sie Δf und ∇f für $f(z) = \sin \omega z$, $f(z) = \cos \omega z$.

15. Beweisen Sie $\nabla q^k = kq^{k-1}$ für $q^k(n) = n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)$.

16. Weisen Sie

$$(\Delta \frac{2n+1}{n(n+1)})(n) = -\frac{2}{n(n+2)}$$

nach und berechnen Sie damit den Summenwert

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}.$$

17. Bestimmen Sie eine Summenformel für

$$\sum_{k=1}^{n} H(k), \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H(k) \text{ und } \sum_{k=0}^{n} k^3$$

18. Lösen Sie die linearen Differenzengleichungen erster Ordnung:

$$f(n+1) - af(n) = 0, f(0) = 1$$
$$f(n+1) - \frac{n+2}{2} f(n) = (n+1)(n+2)3^n, f(0) = 0.$$

19. Lösen Sie die lineare Differenzengleichung erster Ordnung

$$f(n+1) - \frac{1}{n}(n+2)f(n) = n-1, f(0) = 0,$$

die bei der Analyse von Quicksort auftritt!

20. Lösen Sie die Differenzengleichungen

$$f(n+2) - 7f(n+1) + 10f(n) = 3^n, f(0) = 0, f(1) = 1$$
$$f(n+2) + 6f(n+1) + 9f(n) = 3n + 2^n, f(0) = 0, f(1) = 1.$$

21. Bestimmen Sie die Anzahl der Bitfolgen der Länge n, in denen es keine benachbarten Nullen gibt, mit Hilfe einer Differenzengleichung!

Kapitel 7

Algebra

1. Zeigen Sie, dass für die Gruppen $(G_1, \circ)$ und $(G_2, \bullet)$ das kartesische Produkt $G_1 \times G_2$ mit der algebraischen Operation

$$(x_1, y_1) \diamond (x_2, y_2) = (x_1 \circ x_2, y_1 \bullet y_2)$$

eine Gruppe ist!

2. Zeigen Sie, dass für eine Gruppe $(G, \circ)$ und $a, b, c \in G$ $ab = ac \Rightarrow b = c$ gilt!

3. Bestimmen Sie alle Gruppen mit $n \leq 3$ Elementen durch Aufstellen der Verknüpfungstabellen!.

4. Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen Untergruppen der Gruppe der 2×2 Matrizen mit der Matrizenaddition sind:

$$U_1 = \{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{12} = a_{21}\}, U_2 = \{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{12} = a_{21} = 0\}$$

und

$$U_3 = \{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{21} = 1\}.$$

5. Bestimmen Sie den Kern und das Bild des Homomorphismus $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, der durch $f(z) = |z|$ gegeben ist!

6. Ist $G(M, \circ)$ eine Gruppe und $x \in M$. Die *Konjugation* ist durch

$$\gamma_x : M \to M, \gamma_x(n) = x \circ n \circ x^{-1}.$$

definiert. Weisen Sie nach, dass γ_x ein Automorphismus in G und die Menge aller Konjugationen eine Untergruppe von $S(M)$ ist!

7. Bestimmen Sie die Untergruppe von S_5, die isomorph zu $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$ ist!

8. Welche Untergruppen von S_4 sind isomorph zu S_3?

9. Beweisen Sie, dass für eine endliche Gruppe G und einen Homomorphismus $A : G \to G'$ $|G| = |R(A)| \cdot |N(A)|$ gilt!

10. Bestimmen Sie alle Homomorphismen auf der Gruppe S_3!

Tabelle 7.1: Die Multiplikationstabelle

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Tabelle 7.2: Die Additionsstabelle

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

11. Weisen Sie für den Körper mit vier Elementen und den Verknüpfungstafeln 7.1 und 7.2 die Distributivgesetze nach!

12. Ist in den Körpern $\mathbb{Z}_5$ und $\mathbb{Z}_7$ die Gleichung $x^2 = 2$ lösbar? Wenn ja, wie sieht die Lösung aus?

13. Definieren die Verknüpfungstafeln 7.3 und 7.4 für die Menge $\{a, b, c, d\}$ einen Körper?

Tabelle 7.3: Eine Addition?

$\diamond$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Tabelle 7.4: Eine Multiplikation?

$\times$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	d	b
d	a	d	b	c

14. Berechnen Sie Summe und Produkt der Polynome $p(x) = 1 + x^3 + x^6$ und $q(x) = x + x^3 + x^4$ über $\mathbb{R}$ und K_2!

15. Dividieren Sie das Polynom $p_1(x) = x^5 - 1$ mit Rest durch $q_1(x) = x^3 - 1$ und $p_2(x) = -144 - 23x^2 + 2x^4$ durch $q_2(x) = -24 - 6x + 4x^2 + x^3$.

16. Zeigen Sie, dass $x - 4$ ein Teiler des Polynoms $-144 - 23x^2 + 2x^4$ ist!

17. Berechnen Sie die Linearfaktorzerlegung des Polynoms $16 - 4x^2 - 4x^4 + x^6$ über den Körpern $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$!

18. Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms $-1 + x^3$ über $\mathbb{C}$!

19. Setzen Sie die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ in das Polynom $5 + 2x + x^2$ ein! Setzen Sie in das gleiche Polynom die Zahl 3 ein und berechnen Sie das Ergebnis in $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_5$ und $\mathbb{Z}_6$!.

20. Zeigen Sie, dass alle Elemente aus $\mathbb{Z}_6$, wenn Sie diese in das Polynom $p(x) = -x + x^3$ einsetzen, als Ergebnis 0 ergeben. Welche Eigenschaft von $\mathbb{Z}_6$ verursacht dies?

21. Zeigen Sie, dass in einer Booleschen Algebra M das zu $x \in M$ komplementäre Element $\neg x$ eindeutig bestimmt ist!

22. Zeigen Sie, dass für die Menge B aller Abbildungen $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ B mit den folgenden Verknüpfungen eine Boolesche Algebra ist:

$$
\begin{aligned}
(f + g)((x, y) &= \max f(x, y), g(x, y), \\
(f \cdot g)(x, y) &= \min f(x, y), g(x, y), \\
(\neg f)(x, y) &= 1, \ \text{wenn} f(x, y) = 0, \\
(\neg f)(x, y) &= 0, \ \text{wenn} f(x, y) = 1.
\end{aligned}
$$

Die beiden Einheiten bezüglich $+$ und $\cdot$ sind definiert als $n(x, y) = 0$ und $e(x, y) = 1$.

Kapitel 8

Graphentheorie

1. Zeigen Sie für die Adjazenzmatrix A des Graphen $G(E,K)$ mit den Ecken $u_1,\ldots,u_n$ und die Inzidenzmatrix B, dass
$$BB^T = diag(d(u_1),\ldots,d(u_n)) + A$$
gilt.

2. Zeichnen Sie die Graphen G_1 mit der Inzidenzmatrix B und G_2 mit der Adjazenzmatrix A.
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Beweisen Sie: Eine Kante in einem Graphen ist genau dann eine Brücke, wenn sie in keinem Kreis des Graphen liegt.

4. Beweisen Sie, dass für die Inzidenzmatrix B eines gerichteten Graphen $GR(E,K)$ die Zeilensummen gleich $d^+(u) - d^-(u)$ sind und die Spalten sich zu 0 summieren.

5. Zeigen Sie für eine Folge $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n > 0$ von natürlichen Zahlen, dass $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ genau dann die Gradfolge eines Baumes ist, wenn
$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$$
gilt.

6. Wie durchlaufen Sie die Ecken des binären Baums in Abbildung 8.1, wenn Sie beim Besuch der Ecke dessen Symbol schreiben und der Ausdruck $ab - c * ca - bc - /+$ erzielt werden soll? Wie ist der Durchlauf, für das Ergebnis $a - b * c + c - a/b + c$?

7. Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum für den bewerteten Graphen aus Abbildung 8.2.

8. Bestimmen Sie mit dem Dijkstra-Algorithmus die kürzesten Wege für den Graphen in Abbildung 8.18, ausgehend von Ecke c.

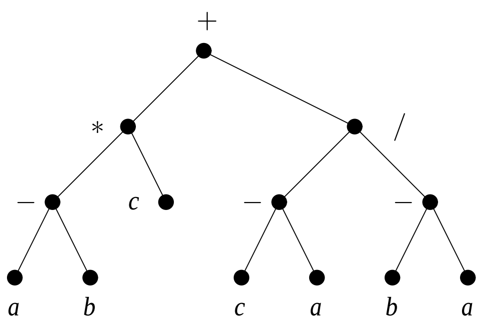

Abbildung 8.1: Der binäre Baum zu Aufgabe 6

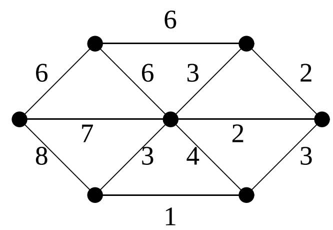

Abbildung 8.2: Der bewertete Graph zu Aufgabe 7

9. Bestimmen Sie die kürzesten Wege von Ecke 1 nach allen anderen Ecken in dem bewerteten Graphen mit der Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 10 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 11 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 8 & 3 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 8 & 0 & 8 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 8 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 2 & 6 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Bestimmen Sie die chromatische Zahl für den Graphen, der aus K_5 durch Entfernen einer beliebigen Kante entsteht, und für den Graphen $G(E, K)$ mit $E = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $K = \{(p, q) \mid q \equiv p + 1 \bmod n\}$.

11. Weisen Sie nach, dass jeder Baum mit zwei Farben gefärbt werden kann!

12. Suchen Sie einen Graphen mit 30 Kanten, in dem jede Ecke Grad 5 hat, und bestimmen Sie seine chromatische Zahl!

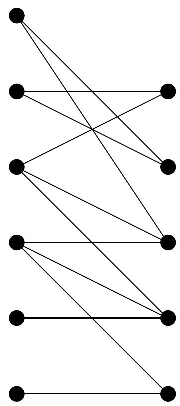

Abbildung 8.3: Der bipartite Graph zu Aufgabe 14

13. Beweisen Sie, dass für einen vollständigen bipartiten Graphen K_{mn} $|E| = m + n, |K| = mn$ gilt!

14. Bestimmen Sie für den bipartiten Graphen G in Abbildung 8.3 ein maximales Matching!

Kapitel 9

Folgen und Reihen

1. Untersuchen Sie die Folgen $a_n = \frac{n}{n+1}, b_n = 3 - 2n$ und $c_n = n + \ln n$ auf Monotonie und Beschränktheit!

2. Untersuchen sie die Folge $a_n = \sqrt{25n^2 + 7n + 1} - 5n$ und weisen Sie nach, dass sie streng monoton fallend und durch $C = 0,7$ nach unten beschränkt ist.

3. Suchen Sie den kleinsten Index n für die Folge $a_n = \frac{2n}{n^2+2}$ mit $a_n < 0,01$.

4. Bestimmen Sie Infimum und Supremum für die Folgen

$$a_n = \frac{2n}{n+1}, b_n = \frac{1}{n^2+1} \text{ und } c_n = (-1)^n \frac{n+2}{3^n}.$$

5. Zeigen Sie, dass die Folgen $a_n = \frac{1}{2^n}$ und $b_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n^2}$ konvergent sind mit Grenzwerten $a = 0$ und $b = 1$.

6. Zeigen Sie, dass die nachstehenden Folgen den angegebenen Grenzwert g besitzen. Darüberhinaus berechnen wir die Anzahl der Folgeglieder, die außerhalb der ϵ-Umgebung um den Grenzwert liegen:

$$a_n = \frac{3n+2}{2n-1}, g = \frac{3}{2}, \epsilon = 0.1, b_n = \frac{3-4n+n^2}{2+3n-n^2}, g = -1, \epsilon = 0.005.$$

7. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{2 - \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{2^n})}{3 + \frac{1}{n^2}}$$

8. Untersuchen Sie die Reihen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!}, \sum_{i=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 5^{2n-1}}$$

auf Konvergenz.

9. Untersuchen Sie die Folge $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ und beweisen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes und der Summenformel für die geometrische Reihe, dass sie beschränkt ist mit der unteren Schranke $A = 2$ und der oberen Schranke $B = 3$.

10. Programmieren Sie in der Sprache Ihrer Wahl eine Funktion, die in einer Schleife die Teilsummen der harmonischen Reihe berechnet und in jedem Schleifendurchgang ausgibt. Wenn Sie die Schleife lang genug laufen lassen, scheint auf dem Computer die harmonische Reihe zu konvergieren. Beschreiben Sie die Gründe für diesen Irrtum!

11. Weisen Sie nach, dass die Reihen für die angegebenen Werte von x absolut konvergieren:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 + x^2}, \forall x \in (0, \infty), \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin ix}{i^{\frac{3}{2}}} \forall x \in \mathbb{R}$$

12. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

$$\sum_{i=1}^{\infty} ix^i, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i^i}, \sum_{i=1}^{\infty} \sin i\pi x^i, \sum_{i=1}^{\infty} \ln ix^i, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i^{\ln i}}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln i}{i} x^i$$

13. Beweisen Sie, dass die Folge $(\frac{F_{n+1}}{F_n})$ konvergiert und den Grenzwert θ besitzt!

14. Benutzen Sie eine Implementierung des Euklidischen Algorithmus und zählen Sie für konkrete Eingaben von a und b mit $b < a$ die Anzahl der benötigten Schritte. Vergleichen Sie diese mit der theoretisch bewiesenen Obergrenze!

Kapitel 10

Differenzial- und Integralrechnung

1. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = 2(x - [x])$!

2. Beweisen Sie , dass $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ für $x_0 = 0$ keinen Funktionenlimes besitzt!

3. Berechnen Sie die Funktionenlimites (falls sie existieren) für die Funktionen

$$f(x) = \frac{8 + x^2}{4 + x}, x_0 = -4, g(x) = \frac{10 + 7x + x^2}{-6 - x - x^2}, x_0 = -2$$

   und

$$h(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}, x_0 = 0.$$

4. Bestimmen Sie die Asymptoten für

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}, g(x) = \frac{1 + x^2 + 2x^3}{2 + x^2}.$$

5. Bestimmen Sie die Unendlichkeitsstellen der Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{\cos x \sin x}, g(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

6. Zwischen welchen Zahlen liegt eine positive Nullstelle von

$$f(x) = -500000 - 1000x^2 + x^3?$$

7. Bestimmen Sie mit Bisektion und Regula Falsi auf zwei Dezimalstellen genau die im Intervall $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ liegende Lösung von $5 \sin x = x$.

8. Wo ist die Funktion $f(x) = |1 + x| - |1 - x|$ monoton?

9. Welche der folgenden Funktionen sind umkehrbar, wie lauten die Umkehrfunktionen?

$$f_1(x) = \sqrt{x+1}, f_2(x) = \sqrt{x^2+1}, f_3(x) = \ln|x| - x, f_4(x) = \frac{x-2}{x+3}.$$

10. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

$$f(x) = (100 - 4x^2 + 3x)(1 + 2x^2),\ f(x) = \frac{+1x^2}{-1 + x^2}$$
$$f(x) = \frac{1}{-1 + x} - \frac{4x}{(-1 + x^2)(1 + x)},\ f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}.$$

11. An welcher Stelle x_0 hat die Ableitung der Funktion $f(x) = (x - 1)\ln x$ den Wert 1?

12. Leiten Sie ab:

$$e^{-kx}\sin\omega x,\ \arcsin\sqrt{x},\ \arctan x + \operatorname{arccot}\frac{1}{x},\ \arccos(1 - 2x).$$

13. Bestimmen Sie die Ableitungen der Hyperbelfunktionen:

$$\sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

14. Ist auf die Funktion $f(x) = \ln(x^2)$ im Intervall $[-1; 1]$ der Mittelwertsatz anwendbar?

15. Stellen Sie für $f(x) = x^2$ die Lage der Stelle ξ fest, für die nach dem Mittelwertsatz $f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$ gilt!

16. Bestimmen Sie eine Approximation von $f(x) = \sin 2x$ durch ein Polynom vom Grad 4 an der Entwicklungsstelle $a = \frac{\pi}{6}$!

17. Stellen Sie das Taylorpolynom für $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$ auf und schätzen Sie das Restglied ab!

18. Berechnen Sie mit De l'Hospital die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cosh x}{x^2},\ \lim_{x\to\infty} x(1 - \cos(\frac{1}{x})),\ \lim_{x\to 0}\sin x \cdot \ln x.$$

19. Beschreiben Sie die Monotonie der Funktion $f(x) = 2x^7 + 3x^5 + 2$.

20. Untersuchen Sie die Funktionen

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4,\ f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x + 1},$$

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x,\ f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x + 2}{4}\ln x + 1$$

auf Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte, Krümmung und zeichnen Sie den Graphen!

21. Ist die Funktion $f(x) = \sin x$ konvex auf dem Intervall $(-\pi, 0)$?

22. Berechnen Sie über eine Grenzwertbetrachtung für die Unter- und Obersummen das bestimmte Integral über $f(x) = 4 - x^2$ von $a = 0$ nach $b = 2$.

23. Schätzen Sie die bestimmten Integrale

$$\int_1^2 e^{-x^2}dx,\ \int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

nach unten und oben ab!

24. Geben Sie die unbestimmten Integrale an für

$$\int (2e^x - 10^x)dx, -\int ta^x dx, \int (e^t - 4^t)dt, \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx, \int \frac{1}{2-2x^2}dx.$$

25. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$$\int_0^3 (x-1)dx, \int_0^{2\pi} \sin x dx, \int_1^4 (x^2-4x)dx, \int_1^5 \frac{5}{x^2}dx.$$

26. Berechnen Sie mit Hilfe der Substitutionsregel oder partieller Integration:

$$\int \frac{8x-3}{4x^2-3x+2}dx, \int \frac{1}{x\ln x}dx, \int \frac{x}{\cos^2 x^2}dx, \int xe^x dx, \int \frac{\ln x}{x}dx, \int e^x \sin x dx.$$

27. Bestimmen Sie eine Rekursionsformel für die Integrale

$$I_n = \int x^n e^{-x} dx.$$

28. Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 6$ und der x-Achse im Intervall $[1; b]$ eingeschlossen wird!

29. Berechen Sie die Fläche zwischen den Graphen von $f(x) = x + 1$ und $g(x) = e^{-x}$ im Intervall $[0; 3]$!

30. Existieren die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^\infty \cos x dx, \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx?$$

31. Existieren die uneigentlichen Integrale

$$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{|x^2-4|}}dx, \int_0^4 \frac{2}{x\sqrt{x}}dx, \int_0^{32} \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}dx?$$

Kapitel 11

Angewandte Analysis

1. Berechnen Sie die Lösung des Interpolationsproblems $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3, y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 3$ mit Hilfe der Lagrange-Polynome und des Newton-Algorithmus.Berechnen Sie die Funktionswerte des Interpolationspolynoms an den Stellen $x = 0,5$ und $x = 2,5$!

2. Interpolieren Sie die Funktion $\ln x$ durch ein quadratisches Polynom in den Stützstellen $x = 10, 11, 12$. Schätzen Sie den Interpolationsfehler an der Stelle $x = 11,1$ ab!

3. Implementieren Sie den Neville-Algorithmus und stellen Sie die Fehlerfunktion $r(x) = f(x) - P_{10}(x)$ für $f(x) = e^{-3x}$ im Intervall $[0;5]$ grafisch dar! Das Polynom P_{10} soll durch die 11 Stützstellen $x_k = 0,5 \cdot k, 0 \leq k \leq 10$ bestimmt werden.

4. Interpolieren Sie die Funktion $f(x) = e^{-x}$ durch Hermite-Interpolation an den Stellen $x_0 = 0,3, x_1 = 0,4$ und bestimmen Sie den Fehler an der Stelle $x = 0,34$!

5. Stellen Sie die Hermite-Polynome fünften Grades auf und lösen Sie damit das Interpolationsproblem $p(0) = y_0, p'(0) = m_0, p''(0) = c_0, p(1) = y_1, p'(1) = m_1, p''(1) = c_1$.

6. Berechnen Sie eine einmal differenzierbare Splinefunktion, die die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ an den äquidistanten Stellen $x_i = -5 + \frac{10}{n} \cdot i, 0 \leq i \leq 10$ interpoliert. Verwenden Sie für die Ableitungswerte FMILL und Bessel-Tangenten und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Ausführungen über den Runge-Effekt!

7. Nähern Sie einen Halbkreis mit Radius 1 bis auf eine Toleranz von $\epsilon = 0,001$ durch eine kubische Splinefunktion an, die einmal differenzierbar sein soll. Verwenden Sie dabei so wenig Knoten wie möglich!

8. Die Akima-Splines sind einmal differenzierbare Splinefunktionen, bei denen die Ableitungen nach der von Akima vorgestellten Formel

$$m_i = (1 - c_i)a_{i-1} + c_i a_i, \text{ wobei}$$
$$a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta_i}, c_i = \frac{|a_{i-1} - a_{i-2}|}{|a_{i-1} - a_{i-2}| + |a_{i+1} - a_i|}$$

   bestimmt werden. Zeigen Sie, dass diese Splinefunktion immer ein Geradensegment durch drei aufeinanderfolgende Wertepaare legt, wenn diese auf einer Geraden liegen!

9. Berechnen Sie für die Funktion aus Aufgabe 6 eine zweimal differenzierbare Splinefunktion! Verwenden Sie einen natürlichen Spline oder Bessel-Tangenten.

10. Zeigen Sie, dass die zweimal differenzierbaren Splinefunktionen lineare, quadratische und kubische Präzision besitzen. Darunter wird verstanden, dass für explizite Endbedingungen die Splines eine Gerade, eine quadratische Parabel oder eine kubische Parabel reproduzieren!

11. Was passiert, wenn wir die Reihenfolge der Knoten $x_0, \ldots, x_n$ umkehren zu $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0$ und die Datenwerte beibehalten?

12. Nähern Sie einen Halbkreis mit Radius 1 mit einer zweimal differenzierbaren Splinefunktion an und vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 7!

13. Nähern Sie die Funktion $f(x) = \frac{5}{2}(\cos(\frac{2\pi x}{16}) - \sin(\frac{4\pi x}{16})) + 5$ durch eine zweimal differenzierbare Splinefunktion an. Verwenden Sie die Wertepaare, die sich durch die Auswertung von f an den Stellen $x_0 = 1, x_1 = 2,5, x_2 = 5,25, x_3 = 9,5, x_4 = 12, x_5 = 14,5$ und $x_6 = 17$ ergeben. Stellen Sie sowohl die Originalfunktion als auch die Splinefunktion im Intervall $[1;17]$ grafisch dar!

14. Eine Hysterese-Kurve ist durch die Messwerte aus Tabelle 11.1 definiert. Aus physikalischen Gründen soll die erste Ableitung im Nullpunkt den Wert $m_0 = 0,00125664$ haben. Im Endpunkt ist $m_8 = 10^{-4}$ festgelegt.

Tabelle 11.1: Die Wertepaare für die Hysterese-Kurve

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0	8,2	14,7	17,0	21,1	35,0	54,1	104,0	357
y_i	0	0,5	1,0	1,1	1,2	1,4	1,5	1,6	1,7

Bestimmen Sie dafür eine einmal- und eine zweimal-differenzierbare Splinekurve!

15. Lösen Sie die nichtlineare Gleichung

$$e^{2x} - \sin x - 2 = 0.$$

Suchen Sie eine Lösung mit $x \geq 0$. Verwenden Sie für die Regula Falsi die Startwerte $x_0 = 0, x_1 = 1$, für Newton $x_0 = 0,25$. Vergleichen Sie die Ergebnisse!

16. Lösen Sie die Gleichung

$$\cos x \cosh x + 1 = 0$$

mit den Verfahren aus diesem Kapitel!

17. Nähern Sie die Integrale

$$\int_0^2 e^2 x, \int_1^3 \sqrt{x^3 - 1} dx$$

mit der Simpson–Regel an und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den exakten Werten.

18. Berechnen Sie das Integral $\int_{1,05}^{1,35} f(x)dx$ mit Hilfe der Simpson–Regel, wenn die folgende Wertetabelle von f bekannt ist:

Tabelle 11.2: Wertetabelle

x	1,05	1,10	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35
$f(x)$	2,36	2,5	2,74	3,04	3,46	3,98	4,6

19. Bestimmen Sie einmal- und zweimal-differenzierbare Splinefunktionen für die Wertepaare aus der Tabelle der Aufgabe 18 und benutzen Sie diese Splines, um das Integral anzunähern!

20. Implementieren Sie die Trapez- und die Simpson-Regel und testen Sie an Hand des Integrals

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(x^2 - 2) \sin x dx.$$

Kapitel 12

Euklidische Vektorräume

1. Tragen Sie in einem Koordinatensystem die folgenden Vektoren ein:
$$(3,4,5), (-3,4,5), (3,-4,5), (3,4,-5).$$
2. Gegeben sind die drei Vektoren $\mathbf{u} = (-3,1,2)$, $\mathbf{v} = (4,0,-8)$, $\mathbf{w} = (6,-1,-4)$. Bestimmen Sie die Komponenten von
$$\mathbf{u} - \mathbf{v}, 6\mathbf{u} + 2\mathbf{w}, -\mathbf{v} + \mathbf{u}, (2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{w} + \mathbf{v}).$$
3. Bestimmen Sie für die Vektoren aus Ausgabe 2 den Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ mit
$$2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}.$$
4. Beweisen Sie, dass es keine Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gibt mit
$$\lambda_1(-2,9,6) + \lambda_2(-3,2,1) + \lambda_3(1,7,5) = (0,5,4).$$
5. Beweisen Sie, dass bei der Definition der Vektorarithmetik die reellen durch komplexe Komponenten ersetzt werden dürfen, wenn die für $\mathbb{R}^n$ definierten Operationen übernommen werden. Der dadurch entstehende Vektorraum heißt $\mathbb{C}^n$.
6. Beweisen Sie, dass $G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = G'(\mathbf{u}', \mathbf{v}') \Leftrightarrow ((G \cap G' \neq \emptyset) \wedge (\exists\, \mu \in \mathbb{R}\ \mathbf{v}' = \mu\mathbf{v})$ gilt.
7. Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Ebene, die die Punkte $(-4,-1,-1)$, $(-2,0,1)$ und $(-1,-2,3)$ enthält!
8. Zeigen Sie, dass die Geraden $G(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ und $G'(\mathbf{u}', \mathbf{v}')$ mit
$$\mathbf{u} = (3,4,1), \mathbf{v} = (-2,1,-1), \mathbf{u}' = (5,1,7), \mathbf{v}' = (2,-1,1)$$
parallel sind!
9. Berechnen Sie das Skalarprodukt
$$\langle (3,1,4,-5), (2,2,-4,-3) \rangle \text{ und } \langle (-1,1,0,4,-3), (-2,-2,0,2,1) \rangle.$$
10. Für welche λ sind $\mathbf{u} = (2,1,3)$, $\mathbf{v} = (1,7,\lambda)$ orthogonal?
11. Warum wird die Gleichung
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$
häufig auch als Satz von Pythagoras bezeichnet?

12. Weisen Sie die Gleichung

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$$

nach. Warum trägt sie die Bezeichnung *Parallelogrammgleichung*?

13. Die Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sollen die Gleichung

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

erfüllen. Beweisen Sie, dass sie orthogonal sind und interpretieren Sie dieses Ergebnis geometrisch!

14. Bestimmen Sie für $\mathbf{x} = (3, 2, -1)$, $\mathbf{y} = (2, 6, 7)$ die Vektoren $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} - 2\mathbf{x})$, $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) - 2\mathbf{y}$.

15. Bestimmen Sie einen Vektor, der auf $(-6, 4, 2), (3, 1, 5)$ oder $(-2, 1, 5), (3, 0, -3)$ senkrecht steht!

16. Vereinfachen Sie den Ausdruck $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \times (\mathbf{u}-\mathbf{v})$!

17. Ist θ der von den Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ eingeschlossene Winkel, dann beweisen Sie, dass

$$\tan\theta = \frac{\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$$

gilt!

18. Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $(2, 2, 0)$, $(-1, 2, 2)$ und $(0, 4, 3)$!

Kapitel 13

Allgemeine Vektorräume

1. Weisen Sie die Gültigkeit der Vektorraumaxiome für $F[0,1]$ nach!
2. Ist die Menge $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ mit $(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$, $\lambda(x,y) = (2\lambda x, 2\lambda y)$ ein Vektorraum?
3. Ist die Menge aller Funktionen $f \in F[0,1]$ mit $f(1) = 0$ mit den aus $F[0,1]$ übernommenen Operationen ein Vektorraum?
4. Welche der folgenden Teilmengen von $P_3[0,1]$ sind Unterräume?
$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, a_0 = 0$$
$$p(x) = a_0 + a_1x + x_2x^2 + a_3x^3, a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$
5. Ist die Menge aller $n \times n$ Matrizen mit $A^T = -A$ ein Unterraum des Vektorraums aller $n \times n$ Matrizen?
6. Sind die Vektoren $(0,3,1,-1)^T, (6,0,5,1)^T, (4,-7,1,3)^T \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig?
7. Ist $\mathbf{x}_3$ ein Vektor eines Vektorraums, der nicht in $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ liegt, dann zeigen wir, dass $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ linear unabhängig sind!
8. Welche der Unterräume
$$U_1 = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\13\end{pmatrix}\right], U_2 = \left[\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix}\right] U_3 = \left[\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}\right]$$
sind gleich?
9. Beweisen Sie, dass für drei beliebige Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ eines Vektorraums V die Vektoren $\mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{v}-\mathbf{w}, \mathbf{w}-\mathbf{u}$ linear abhängig sind!
10. Weisen Sie die lineare Unabhängigkeit von $\sin x, \cos x, x \sin x$ und e^x, xe^x, x^2e^x nach!
11. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(0,1,a)^T$ und $(1,a,0)^T$ linear abhängig?
12. Die ersten vier Legendre–Polynome sind definiert als
$$p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x).$$
Welche Dimension hat der Unterraum $[p_0, p_1, p_2, p_3] \subset P_3$?

13. Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrix P für $B = \{(1,1)^T, (2,1,\})^T$ und $B' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ und die Koordinaten des Vektors $\mathbf{z} = (-3,5)^T$ bezüglich B!

14. Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrix für den Übergang von der Monombasis auf die Hermitebasis in P_3!

15. Die kubischen Bernsteinpolynome sind definiert durch

$$B_0(t) = (1-t)^3, B_1(t) = 3t(1-t)^2, B_2(t) = 3t^2(1-t), B_3(t) = t^3.$$

Bestimmen Sie alle Basistransformationsmatrizen für die Übergänge zwischen Monombasis und Hermitebasis auf die Bernsteinbasis!

16. Welche geometrische Bedeutung haben die Koordinaten eines Vektors im $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis mit den Vektoren

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

17. Bestimmen Sie eine Basis des von den Vektoren $\mathbf{v}_1 = (1,-2,0,0,3)^T, \mathbf{v}_2 = (2,-5,-3,-2,6)^t, \mathbf{v}_3 = (0,5,15,10,0)^T$ und $\mathbf{v}_4 = (2,6,18,8,6)^T$ aufgespannten Unterraums des $\mathbb{R}^5$!

18. Bestimmen Sie eine linear unabhängige Teilmenge der Vektoren $\mathbf{x}_1 = (1,-2,0,3)^t, \mathbf{x}_2 = (2,-5,-3,6)^T, \mathbf{x}_3 = (2,-1,4,-7)^T$ und $\mathbf{x}_4 = (5,-8,1,2)^T$, die denselben Unterraum des $\mathbb{R}^4$ aufspannen!

19. Berechnen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens ausgehend von der Basis $\{1, x, x^2\}$ eine Orthonormalbasis für den Vektorraum $P_2[0,1]$ mit dem Skalarprodukt $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

20. Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

21. Berechnen Sie die least-squares-Lösung von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

22. Zeigen Sie, dass für eine Matrix A mit linear unabhängigen Spaltenvektoren und einer rechten Seite $\mathbf{b}$, die orthogonal zum Spaltenraum von A ist, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ die least-squares-Lösung von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist.

23. Bei der Messung einer chemischen Verbindung ergeben sich bei verschiedenen Temperaturen verschiedene Messwerte. Es wird angenommen, dass ein linearer Zusammenhang zwischen Temperatur und Konzentration vorliegt. Berechnen Sie die Ausgleichsgerade zur Tabelle 13.1!

Tabelle 13.1: Die Messwerte

150	150	150	200	200	200	250	250	250	300	300	300
77,4	76,7	78,2	84,1	84,5	83,7	88,9	89,2	89,7	94,2	94,7	95,9

x_i	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
y_i	0,3	0,5	0,8	1,0	1,2	1,3

24. Zur analytischen Beschreibung der Kennlinie eines nichtlinearen Übertragungselements $y = f(x)$ sind für exakte Eingangsgrößen x_i die Ausgangsgrößen y_i wie in der Tabelle beobachtet worden:

    Das Übertragungselement verhält sich für kleine x linear, die Kennlinie besitzt für große x eine horizontale Asymptote. Dieses Verhalten wird durch den Ansatz

$$f(x) = a_1 \frac{x}{1+x} + a_2 \left(1 - e^{-x}\right)$$

    modelliert, mit den beiden unbekannten Parametern a_1, a_2. Stellen Sie die Matrix A und die rechte Seite $\mathbf{b}$ auf und lösen Sie das Problem durch eine QR-Zerlegung!

Kapitel 14

Lineare Abbildungen

1. Ist die Abbildung $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $T(x_1, x_2) = (x_! + 2x_2, 3x_1 - x_2)^T$ linear?
2. Sind die Abbildungen $T: U \to \mathbb{R}$ mit $T(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ und $K: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $K\mathbf{x} = \mathbf{x} \times \mathbf{x}_0$ mit einem festen Vektor $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ linear?
3. $B = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} = \{(1,2,1)^T, (2,9,0)^T, (3,3,4)^T\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Stellen Sie eine allgemeine Beschreibung für die lineare Abbildung $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit
$$F(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, F(\mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, F(\mathbf{x}_3) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
auf!
4. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Abbildung $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(\mathbf{e}_1) = (1,2,1)^T, F(\mathbf{e}_2) = (1,0,-2)^T$ bezüglich den kanonischen Basen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$! Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der gleichen Abbildung zu den Basen
$$A = \{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\}, B = \{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\}.$$
5. D und S sind die durch die Ableitung und die Stammfunktion gegebenen linearen Abbildungen. Berechnen Sie $(S \circ D)(f)$ für $f(x) = x^2 + 3x + 2$, $f(x) = \sin x$ und $f(x) = x$.
6. Bestimmen Sie für P_n mit der Basis $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ die Matrixdarstellung der „Ableitungsabbildung“ $Dp(x) = p'(x)$!
7. Welche darstellende Matrix hat die Summe von zwei linearen Abbildungen $F + G$?
8. Eine Scherung ist eine Transformation, die jeden Vektor $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ auf den Vektor $(x_1 + \lambda x_2, x_2)^T$ oder $(x_1, \lambda x_1 + x_2)^T$ abbildet. Weisen Sie nach, dass eine Scherung linear ist und stellen Sie die Matrixdarstellung auf!
9. Stellen Sie die Matrixdarstellung einer Scherung in x-Richtung auf, die das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (2,1), (3,0)$ auf ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel im Ursprung abbildet!
10. Beweisen Sie, dass eine 2×2 Matrix A genau dann orthogonal ist, wenn sie die Form
$$A = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix} \text{ oder } A = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ -\sin\phi & -\cos\phi\end{pmatrix}$$
aufweist!

11. Bestimmen Sie die zugehörige quadratische Form für $x^2 + y^2 - z^2 + 4xy - 5yz + 7x + 2z = 3$.

12. Wenden Sie die Hauptachsentransformation auf die quadratischen Formen $2x^2 + 2y^2 - 2xy$ und $-3x^2 + yx^2 + 2xy$ an!

13. Diagonalisieren Sie die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & 24 & 0 & 0 \\ 24 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 24 \\ 0 & 0 & 24 & 7 \end{pmatrix}.$$

14. Diagonalisieren Sie die Matrix $A = I_3 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T$ für $\mathbf{v} = (1, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^3$!

15. Weisen Sie nach, dass die für $\mathbf{a} = (1, -1, 2)^T \in \mathbb{R}^3$ gegebene Abbildung

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{a}^T\mathbf{x}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}$$

linear ist und bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$, sodass die darstellende Matrix der linearen Abbildung gleich der Matrix $A = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^T$ ist!

16. Beweisen Sie, dass für jeden Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ die Matrix $I_n - \beta\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ diagonalisierbar ist!

17. Gegeben ist die Diagonalmatrix $D = diag(-1, 3, 3)$ und

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ und } \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1 | V_2)^{-1}.$$

Weisen Sie nach, dass $-\mathbf{v}_1 W_1 + 3V_2 W_2$ zu D ähnlich ist!

18. Der Satz von Cayley-Hamilton sagt aus, dass für eine $n \times n$ Matrix A mit charakteristischem Polynom $p(\lambda) = \sum a_i \lambda^i$ $p(A) = 0$ erfüllt ist. Verifizieren Sie diese Aussage für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

19. Der Spann $W = [2, e^x, e^{-x}, e^{2x}]$ ist ein Unterraum des $C^1(\mathbb{R})$, die lineare Abbildung D ist durch die Ableitung $(Df)(x) = f'(x)$ gegeben. Bestimmen Sie alle Eigenwerte von D und eine Basis von W, die aus Eigenvektoren von D besteht!

20. A und B sollen $n \times n$ Matrizen sein. Weisen Sie nach, dass $AB = BA$ genau dann gilt, wenn es linear unabhängige Vektoren $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ gibt, die sowohl Eigenvektoren von A als auch von B sind!

21. Eine Matrix heißt *nilpotent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^n = 0$. Was können Sie über die Eigenwerte einer nilpotenten Matrix aussagen?

22. Weisen Sie nach, dass für jede $m \times n$ Matrix A die Matrizen A^TA und AA^T die gleichen Eigenwerte besitzen!

23. Bestimmen Sie eine Matrix P, die für eine $m \times n$ Matrix A die Gleichung $P^2 = A^TA$ erfüllt!