Kapitel 9

Folgen und Reihen

1. (a_n) ist streng monoton steigend und beschränkt mit Schranken 0 und 1, (b_n) ist streng monoton fallend und nach oben beschränkt mit Schranke 1, (c_n) ist streng monoton steigend und nach unten beschränkt mit Schranke 1.

2. Dass 0.7 eine untere Schranke der Folge (a_n) ist folgt aus

$$\begin{aligned} a_n > 0.7 &\Leftrightarrow \sqrt{25n^2 + 7n + 1} > 5n + \frac{7}{10} \\ &\Leftrightarrow 25n^2 + 7n + 1 > 25n^2 + 7n + (\frac{7}{10})^2 \\ &\Leftrightarrow 1 > \frac{49}{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{25(n+1)^2 + 7(n+1) + 1} - (\sqrt{25n^+7n+1} + 5) \\ &= \sqrt{25n^+7n + 26 + (50n+7)} - \sqrt{25n^2 + 7n + 26 + 10\sqrt{25n^2 + 7n + 1}}. \end{aligned}$$

Es ist $10\sqrt{25n^2 + 7n + 1} > 50n + 7$, damit folgt $a_{n+1} - a_n < 0$.

3. Die Ungleichung

$$\frac{2n}{n^2 + 2} < \frac{1}{100}$$

ist erfüllt für $n > 200$.

4. Die Folge (a_n) hat das Infimum 1 und Supremum 2, (b_n) 0 als Infimum und $\frac{1}{2}$ als Supremum und (c_n) besitzt das Infimum -1 und Supremum $\frac{4}{9}$.

5. Für beliebiges $\epsilon > 0$ und $n > \log_2 \frac{1}{\epsilon}$ ist $|\frac{1}{2^n}| < \epsilon$, für $n > \frac{1}{\epsilon}\sqrt{\epsilon}$ ist $|b_n - b| < \epsilon$.

6. Ausklammern der höchsten Potenz aus und die Limessätze verwenden! Bei der Folge (a_n) liegen die ersten 17 Folgeglieder ausserhalb der ϵ-Umgebung mit $\epsilon = 0.1$, bei (b_n) sind dies die ersten 197 Folgeglieder für $\epsilon = 0.005$.

7. $\frac{2}{3}$.

8. Die ersten drei Reihen konvergieren auf Grund des Quotientenkriteriums, die Konvergenz der alternierenden Reihe folgt aus dem Leibniz-Kriterium.

9. Mit dem binomischen Lehrsatz folgt

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}.$$

Mit den ersten beiden Summanden ist $a_n > 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} = 2$. Es ist

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{123\cdots k} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &= \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) < \frac{1}{k!};\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Die Folge $(\frac{1}{2})^n$ ist eine Nullfolge. (a_n) ist auch monoton wachsend und konvergiert gegen die Euler'sche Zahl $e = 2.71828182\ldots$.

10. Wie wir wissen divergiert die harmonische Reihe, die Folge der Teilsummen wächst über jede Grenze. Egal welches Gleitpunkt-Zahlensystem wir benutzen, jedes dieser Systeme hat eine größte darstellbare Zahl. Wird diese erreicht, erhalten wir danach immer nur diese größte Zahl als Summenwert.

11. Es gibt die konvergenten Majoranten $\sum \frac{1}{i^2}$ und $\sum \frac{1}{i^{3/2}}$.

12. $R = 1$, am Rand divergent; $R = \infty$; $R = \infty$; $R = 1$, am Rand divergent; $R = 1$, am Rand konvergent; $R = 1$, für $x = 1$ divergent, für $x = -1$ konvergent.

13. Wenn wir den Quotienten bilden und ausnutzen, dass wir die Glieder der Fibonacci-Folge durch den goldenen Schnitt θ angeben können, dann erhalten wir

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\theta^{n+1} + (1-\theta)^{n+1}}{\theta^n + (1-\theta)^n},$$

mit den Limessätzen folgt die Behauptung, denn $(1-\theta)^n$ ist eine Nullfolge.

14. Der Kern einer Implementierung des euklidischen Algorithmus:

```
while (b!=0) { temp = a; b = a%b; b = temp; }
return a;
```

Die Werte in der folgenden Tabelle wurden mit g++ und *unsigned long* als Ganzzahltyp berechnet.

a	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
$\left[\frac{\log(\sqrt{5}a+\frac{1}{2})}{\log\theta}\right]$	10	15	19	24	29	34	38	43
Max. Anzahl Schritte für ggT$(a,b), b < a$	7	11	15	19	24	28	32	37