Kapitel 8

Graphentheorie

1. Die Matrix BB^T ist eine $n \times n$ Matrix. Für die Elemente des Produkts ausserhalb der Diagonalen ist $b_{il}b_{lj} = 1$ genau dann, wenn es eine Kante zwischen den Ecken u_i und u_j gibt. In der Diagonalen gilt $\sum_{k=1, i\neq i}^{m} b_{ik}b_{ki} = d(u_i)$.
2. Lesen Sie die Inzidenzmatrix spaltenweise, dann können Sie direkt den Graphen zeichnen. Bei der Adjazenzmatrix reicht es, das obere Dreieck zu betrachten und die Kanten zu zeichnen. Graphnelayout ist nicht so leicht ...
3. Angenommen, k ist eine Brücke und liegt in einem Kreis. Dann kann nach dem Herausnehmen von k immer noch jeder Knoten im Kreis erreicht werden; ein Widerspruch. Ist umgekehrt $k = u_i u_j$ eine Brücke, dann gibt es keinen weiteren Weg von u_i nach u_j, k kann nicht in einem Kreis liegen.
4. In jeder Spalte j gibt es zwei Einträge ungleich Null. Einer der Einträge entspricht einem Anfangs-, einer einem Endpunkt. Daraus folgt die Spaltensumme. $d^+(u)$ entspricht der Anzahl der 1-Einträge in jeder Zeile, $d^-(u)$ der -1- Einträge.
5. Für einen Baum gilt $|K| = |E| - 1$, mit Satz 8.1 folgt die eine Richtung. Dass eine Folge von Zahlen mit der geforderten Eigenschaft einen Baum definiert kann induktiv bewiesen werden. Für $n = 2$ ist $d_1 = d_2 = 1$ die einzige Möglichkeit, der zugehörige Graph ist K_2. In $d_1 \geq \ldots \geq d_{n+1} > 0$ mit $\sum d_i = 2n$ gibt es zwei Indizes mit $d_i = 1, d_j > 1$. Durch Entfernen dieser beiden Zahlen und der dazugehörenden Ecken und anschliessenden Hinzufügen der Zahl $d_j - 1$ können wir die Induktionsbehauptung anwenden.
6. Ausgehend von der Wurzel einmal Tiefensuche, im zweiten Fall Breitensuche.
7. $1(1)3(2)2(3)2(4)6(5)6(6)$.
8. $K_5 = \{ce, ef, cb, cd, ba\}$.
9. $K_6 = \{15, 13, 57, 32, 36, 74\}$.
10. K_5 ohne eine beliebige Kante hat die chromatische Zahl 4. Die anderen Graphen sind Kreise. Für gerades n haben Kreise die chromatische Zahl 2, für ungerades n 3.
11. Niveauweise Färben!
12. Ein Graph mit 12 Ecken hat wegen Satz 8.1 die geforderte Eigenschaft. Beispielsweise der Graph mit den Zusammenhangskomponenten $G = K_6 \cup K_6$ hat die chromatische Zahl 6.
13. $|E| = m + n$ folgt direkt aus der Definition; $|K| = mn$ aus der Produktregel der Kombinatorik.
14. Ist die Eckenbezeichnung von oben nach unten links $1, 2, 3, 4, 5, 6$, rechts a, b, c, d, e, dann ist $\{1b, 2a, 3c, 4d, 6e\}$ ein maximales Matching.