Kapitel 6

Kombinatorik

1. 159.
2. $64 \cdot 49 = 3\,136$.
3. Jede Zahl in $M \setminus \{100\}$ können wir als $m = x \cdot 9 + y$ darstellen, mit $x \in X = \{0, \ldots, 10\}$, $y \in Y = \{1, \ldots, 9\}$. Eine Teilmenge $L \subseteq M$ ist dann als eine Relation in $X \times Y$ interpretierbar. in der Notation wie in Tabelle 6.1 ergibt sich eine Verteilung von 0 und 1 Einträgen. Die Anzahl der Einsen ist die Mächtigkeit der Teilmenge. Die maximale Kardinalzahl einer Teilmenge L von M, so dass immer $a - b \neq 9$ gilt entsteht durch alternierende 1-Einträge in jeder Spalte. Das entspricht einer Teilmenge mit 54 Elementen. Ein 55. Element muss in einer der Spalten liegen.
4. 32!
5. $30 \cdot (52 \cdot 51 + 10^4) = 382680$.
6. Einsetzen der Definition.
7. Mit der binomischen Formel gilt $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$.
8. Es gibt $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ Möglichkeiten, gegnerische Doppel auszusuchen und $\frac{(4n)!}{2^n n!}$ Möglichkeiten, Doppel zu bilden.
9. Mit der Annahme, dass die Anzahl der Professoren, die zwei Programmiersprachen beherrschen unabhängig von den Sprachen ist, ist die gesuchte Anzahl 90.
10. $1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 12x^4 + 12x^5 + 10x^6 + 6x^7 + 2x^8 + x^9$.
11. $\binom{24}{6}\binom{18}{6}\binom{12}{4}\binom{8}{4} = \frac{24!}{(6!)^2(4!)^3}$.
12. Ergibt sich aus der Mengenalgebra oder dem Inklusions/Exklusionsprinzip als $7^{10} - 2 \cdot 6^{10} + 5^{10}$.
13. 2-Permutationen: 2, 3-Permutationen: 9, 4-Permutationen: 12, 5-Permutationen: 20, 6-Permutationen: 120.
14. $\Delta(\sin \omega n) = \sin(n+1)\omega - \sin n\omega$, $\Delta(\cos \omega n) = \cos(n+1)\omega - \cos n\omega$.
15. Der Nachweis verläuft analog zu $(\Delta p^k)(n) = kp^{k-1}(n)$ auf Seite 174.
16. Als Summenformel ergibt sich $\frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}$.
17. $\sum_k H_k = (n+1)H_{n+1} - n$, $\sum_k \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1} \frac{H_{n+1}-1}{m+1}$, $\sum k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

18. $f(n) = a^n$, $f(n) = \frac{(n+1)!}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{6^k}{k!}$.

19. $f(n) = n(n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k-1}{(k+1)(k+2)}$.

20. $f(n) = -\frac{1}{3}2^n + \frac{1}{3}5^n - \frac{1}{2}3^n$, $f(n) = n(-3)^{n-1} + \frac{3}{16}n - \frac{3}{32} + \frac{1}{25}2^n$.

21. Das Ergebnis ist wiederum die Fibonacci-Folge $f(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}(\theta^n - (1-\theta)^n)$.