Kapitel 5

Matrizen und lineare Gleichungssysteme

1. $(AB)C = A(BC) = \left(\begin{smallmatrix} -29 & -3 \\ -7 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.
2. Für singuläre Matrizen $A \neq 0$ können die Regeln verletzt werden!
3. Folgt aus
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=j+1}^{l} a_{ik} b_{kj} = 0.$$
4. Wegen Satz 5.6 ist $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. a, b, c ergeben sich als Lösung eines linearen Gleichungssystems, es gilt $a = -1, b = 3, c = 1$.
6. Die Koeffizienten ergeben sich als Lösung eines linearen Gleichungssystems, es gilt $a_3 = 1, a_2 = -2, a_1 = 0, a_0 = 3$.
7. Es ist
$$E_1 = E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
8. A ist nicht invertierbar,
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$
9. Die Inverse ist eindeutig bestimmt, nachrechnen der beiden Eigenschaften führt leicht zum Beweis.
10. Hat $(QA)\mathbf{x} = Q(A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dann kann auch $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung haben.

11. Für A:

$$L = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

für B:

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -10 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung für B ist $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}^T$.

12. 102.

13. A ist singulär!

14. Die Eigenwerte von A: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$, die Eigenvektoren sind $\mathbf{x}_1 = (-1, 1)^T, \mathbf{x}_2 = (1, 1)^T$.

    Die Eigenwerte von B: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, die Eigenvektoren sind $\mathbf{x}_1 = (0, 1, 0)^T, \mathbf{x}_2 = (-1, 2, 2)^T, \mathbf{x}_3 = (-1, 1, 1)^T$.

15. Die Eigenwerte von A^{25} sind λ^{25} der jeweiligen Eigenwerte von A, es gilt $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$.

16. Die Matrix A muss zwei reelle Eigenwerte haben. Mit der Formel von Vieta folgt dann nach Aufstellen des charakteristischen Polynoms die Behauptung.

17. Die Matrix F hat die Eigenwerte θ und $1 - \theta$, analog dem Beispiel im Text erhalten wir die Darstellung der Fibonacci-Folge auf Seite 184!