# Kapitel 1

# Aussagenlogik

1. Die Konjunktion „Der Hamster kann fliegen“ $\wedge$ „Der Wellensittich kann fliegen“ ist falsch. „Am Himmel sind Wolken“ $\wedge$ „Es scheint die Sonne“ ist nur dann falsch, wenn am Himmel keine Wolken sind und nicht die Sonne scheint. !„Eis ist flüssig“ ist wahr.

2. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ ist eine Tautologie.

   $p \Rightarrow (q \Rightarrow (r \vee \neg p))$ hat die folgende Wahrheitstabelle:

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \Rightarrow (q \Rightarrow (r \vee \neg p))$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $f$ | $f$ | $w$ |
| $f$ | $f$ | $w$ | $w$ |
| $f$ | $w$ | $f$ | $w$ |
| $f$ | $w$ | $w$ | $w$ |
| $w$ | $f$ | $f$ | $w$ |
| $w$ | $f$ | $w$ | $w$ |
| $w$ | $w$ | $f$ | $f$ |
| $w$ | $w$ | $w$ | $w$ |

3. Der Ausdruck ist keine Tautologie. Wenn die Wahrheitswerte der Variablen $p$ und $q$ übereinstimmen ist der Ausdruck falsch.

4. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) = p \Leftrightarrow q$.

5. $a = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) = \neg r \vee (\neg p \wedge q) = r \wedge (p \vee \neg q)$, $b = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) = \neg p \wedge (\neg q \vee \neg r) = p \vee (q \wedge r)$.

6. $g = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) = (p \wedge w) \vee (r \wedge w) = p \vee r$.

7. $\neg x \wedge \neg y \vee (x \wedge \neg y \wedge z)$.

8. $m = w$ „Motor läuft“, $d = w$ „Öldruck vorhanden“, $t = w$ „Temperatur in Ordnung“:

$$f(m, d, t) = (m \wedge \neg d) \vee (m \wedge \neg t).$$

9. $L = w$ „Licht an“, $S = w$ „Schlüssel steckt“, $T = w$ „Tür ist geschlossen“, $W = w$ „Warnton ertönt“:

$$W = L \wedge \neg S \wedge \neg T.$$

10. Mit den logischen Ausdrücken

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D,\\
z_1 &= \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D,\\
z_2 &= \neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D,\\
z_3 &= \neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D,\\
z_4 &= \neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D,\\
z_5 &= \neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D,\\
z_6 &= \neg A \wedge B \wedge C \wedge \neg D,\\
z_7 &= \neg A \wedge B \wedge C \wedge D,\\
z_8 &= A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D,\\
z_9 &= A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D
\end{aligned}
$$

erhalten wir die Steuerung

$$
\begin{aligned}
a &= \neg(z_1 \vee z_4),\\
b &= \neg(z_5 \vee z_6),\\
c &= \neg z_2,\\
d &= \neg(z_1 \vee z_4 \vee z_7),\\
e &= z_0 \vee z_2 \vee z_6 \vee z_8,\\
f &= \neg(z_1 \vee z_2 \vee z_3 \vee z_7),\\
g &= \neg(z_0 \vee z_1 \vee z_7).
\end{aligned}
$$

11. Auf zur Buchhandlung ...

12. Wahrheitstabelle aufstellen!

13. $\frac{(a+b)^2}{4} - ab = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0$.

14. Direkter Beweis: $(2n+1)(2m+1) = 2(2nm+n+m)+1$, indirekter Beweis: $(2n+1)(2m+1) = 2k \Leftrightarrow 2(2nm+n+m) = 2k-1$, ein Widerspruch.

15. Die Induktionsbasis ist $n = 4$: $2^4 = 16 < 4! = 24$. Der Induktionsschritt folgt aus $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 < 2n! < (n+1)n! = (n+1)!$.

16. $1+2+\cdots+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, die zweite Behauptung folgt mit $2+6+10+\cdots(4(n+1)-2) = 2n^2+4n+2 = 2(n+1)^2$.