Kapitel 4

Relationen und Abbildungen

1. .

2. Wir ordnen in den einzelnen Farben die Karten als 7, 8, 9, Bube, Dame, König, 10, 11, die Farben in der Reihenfolge Karo, Herz, Pik und Kreuz. Eine mögliche Verteilung wäre dann beispielsweise:

$$\begin{array}{cccc} 01100010 & 01001001 & 00101010 & 00000100 \\ 00000101 & 01100101 & 01010100 & 10000000 \\ 10011000 & 00000000 & 10000000 & 01111011 \\ 00000000 & 00001000 & 00000001 & 00000000 \end{array}$$

3. $\emptyset$.

4. Beide Aussagen sind falsch. Ein Gegenbeispiel für die erste Aussage ist $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{1, 6, 7\}$, $V = \{2, 6, 7\}$; für die zweite $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{0, 1\}$, $V = \{-1, 0, 1\}$.

5. $S \times (T \cap V) = \{(1, b), (2, b)\}$,
   $(S \times T) \cup (S \times V) = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$
   $(S \times T) \cap (S \times V) = \{(1, b), (2, b)\}$.

6. Regionalzüge haben hier immer nur einen Waggon, wir erhalten
   $Z \times A = \{(Z_1, A_1), (Z_1, A_2), (Z_2, A_1), (Z_2, A_2), (Z_3, A_1), (Z_3, A_2)\}$.

7. Als Tabelle erhalten wir

x	y
1	2
1	5
1	6
2	2
2	4
3	4
3	6
4	6
5	5

8. Ist möglich, wie das Beispiel $R_1 = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$, $R_2 = \{(c, 1), (d, 2)\}$ zeigt, die Verknüpfung ist möglich, das Ergebnis ist $\emptyset$.

9. $R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = \{(d, a), (a, a)\}$, $R_1^{-1} \circ R_2^{-1} 0 \{(b, c), (c, c)\}$.

10. $(x, x) \in R_1 \wedge (x, x) \in R_2 \Rightarrow (x, x) \in R_1 \circ R_2 \; \forall x \in M$.

11. Für $(x, y) \in R$ müssen wir $(x, y) \in R \circ R$ nachweisen. R ist reflexiv, also ist $(x, x) \in R$. $(x, x) \in R, (x, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in R \circ R$.

12. Wenn wir schreiben, was $R \circ R \subseteq R$ bedeutet, steht da die Definition der Transitivität!

13. Die möglichen Partitionen sind $K_1 = \emptyset, K_2 = M; K_1 = \{9\}, K_2 = \{12\}, K_3 = \{21\}; K_1 = \{9\}, K_2 = \{12, 21\}; K_1 = \{12\}, K_2 = \{9, 21\}; K_1 = \{21\}, K_2 = \{9, 12\}$. Dass die angegebene Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, können Sie leicht nachrechnen. Die Äquivalenzklassen sind $[9] = \{9\}, [12] = \{12, 21\}$.

14. R_m ist eine Äquivalenzrelation. R_W ist keine, sie ist nicht reflexiv. R_{10} ist ebenfalls keine Äquivalenzrelation, denn sie ist nicht reflexiv, $(4, 4) \notin R_{10}$.

15. Das ist analog zu Satz 4.9 beweisbar!

16. Die Ordnungseigenschaften sind leicht nachrechenbar. Die erste Teilordnung ist nicht total, denn es gibt unvergleichbare Paare wie $(3, 6), (4, 1)$. Bei der zweiten Ordnung kann das nicht auftreten.

17. Wenn R transitiv ist, dann ist auch $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Die Antisymmetrie der Teilordnung folgt aus $R[x] \leq R[y] \Leftarrow (x, y) \in R$, $R[y] \leq R[x] \Leftarrow (x, y) \in R$. Dann ist aber $(x, y) \in R, (x, y) \in R$ und $x \sim y \Leftrightarrow R[x] = R[y]$.

18. Die Abbildung f ist für $n \geq 5$ periodisch, es ist $f(n) = f(n + 6)$. Dann kann sie aber nicht surjektiv sein!

19. Es gilt

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= 2x + 1, \\
(f \circ h)(x) &= x^2 + 1, \\
(g \circ f)(x) &= 2(x + 1), \\
(g \circ h)(x) &= 2x^2, \\
(h \circ h)(x) &= (x + 1)^2, \\
(h \circ g)(x) &= 4x^2.
\end{aligned}
$$

20. Folgt aus Satz 4.6, Abbildungen sind Relationen!

21. Es gibt vier Abbildungen $f : [0, 1] \to [0, 1]$:

0	1
0	0

0	1
0	1

0	1
1	0

0	1
1	1

22. f hat nur natürliche Zahlen als Bilder, denn entweder ist $(n + m)$ oder $(n + m + 1)$ gerade. Allerdings ist $f(m, n) \geq 4$, also ist f nicht bijektiv!

23. Nach Satz 4.13 ist das Intervall $[0, 1]$ überabzählbar. Die Abbildung $\phi : [a, b] \to [0, 1]$ ist bijektiv. Für $y \in [0, 1]$ ist das eindeutige Urbild gegeben durch $t = a + y(b - a)$. Damit haben alle Intervalle die gleiche Kardinalzahl.

24. Wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$ sicher nicht abzählbar. Wenn Sie in der theoretischen Informatik etwas über die Kontinuumshypothese gehört haben, dann wissen Sie, wie der Beweis funktioniert.

    Wir führen für Kardinalzahlen eine Arithmetik ein, die Summe zweier Kardinalzahlen ist definiert als $|M| + |N| = |M \cup N|$. Das Produkt ist definiert über die Mächtigkeit des kartesischen Produkts $|M| \cdot |N| = |M \times N|$. Dann kann $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ und $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = |\mathbb{R}|$ bewiesen werden. Damit folgt sofort $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}^2| = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = |\mathbb{R}|$.

25. Wenn wir die Operation als Mengenoperation schreiben steht da $R_1 \cap R_2$.

26. Wir übersetzen die relationalen Operatoren in Mengenoperatoren und führen einen Beweis der Gleichheit zweier Mengen.