Kapitel 2

Zahlen

1. Der Beweis für $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ verläuft vollkommen analog zum Beweis von $\sqrt{2}$. Der Beweis für $\sqrt{4} \notin \mathbb{Q}$ bricht zusammen, denn wenn p^2 durch 4 teilbar ist, dann muss dies nicht für p gelten. Ein Gegenbeispiel ist $p^2 = 36$.
2. $\sum x_i = 10, \prod x_i = 20, \sum x_i y_i = 18, \prod x_i y_i = 240$.
3. $\sum \frac{1}{i} = 2{,}928\,968\,253\,968\,25, \sum(i+3) = 85, \prod(6i-2) = 74\,385\,581\,670\,400$.
4. Die beiden Wurzeln für $(1+i)^{\frac{1}{2}}$:

$$z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos 22{,}5^\circ + i \sin 22{,}5^\circ)$$
$$z_2 = \sqrt[4]{2}(\cos 202{,}5^\circ + i \sin 202{,}5^\circ)$$

Die vier Wurzeln für $(-8 + i8\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$:

$$z_1 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$
$$z_2 = 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$
$$z_3 = 2(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$$
$$z_4 = 2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$$

Die drei Wurzeln für $i^{\frac{1}{3}}$:

$$z_1 = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$$
$$z_2 = \cos 150^\circ + i \sin 150^\circ$$
$$z_3 = \cos 270^\circ + i \sin 270^\circ$$

5. $z_i = \cos\left((i-1)\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left((i-1)\frac{2\pi}{5}\right), 1 \le i \le 5$.
6. Weil genau vor der ersten Nachkommastelle aufgehört wird, bei der $0.\ldots\overline{00}$ beginnen würde.
7. $(674)_{10} = (10144)_5 = (1010100010)_2$
8. $(745)_8 = (485)_{10} = (122222)_3$
9. Exemplarisch die Addition:

$$\begin{aligned}(543)_6 + (242)_6 &= 5 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 4 \cdot 1 \\ &= (1225)_6\end{aligned}$$

10. $\frac{1}{5} = (0.\overline{1254})_7$, $\frac{2}{5} = (0.\overline{0110})_2$

11. Die Zahl $1,0$ ist gegeben durch $1_2 \cdot 2^0$. Also ist die Mantisse gegeben durch 00 000 000 000 000 000 000 000, die Charakteristik ist gegeben durch $127 + 0 = 127$, also durch 01 111 111.

    $0,5$ ist gegeben durch $(0,1)_2 \cdot 2^0$. Durch Normalisieren erhält man den Dualbruch $(1,0)_2 \cdot 2^{-1}$. Die Mantisse ist also 00 000 000 000 000 000 000 000, die Charakteristik $127 - 1 = 126 = (01\,111\,110)_2$.

    $6,625$ entspricht in Dualdarstellung $(110,101)_2 \cdot 2^0 = (1,10101)_2 \cdot 2^2$. Dann ist die Mantisse gegeben durch $m = 01\,010\,100\,000\,000\,000\,000\,000$; die Charakteristik ist $127 + 2 = 129 = (10\,000\,001)_2$.

    3456 ist als Dualzahl gegeben durch $(110\,110\,000\,000)_2 \cdot 2^0 = (1,101\,100\,000\,00)_2 \cdot 2^{11}$. Die Mantisse ist dann gegeben durch $m = (10\,110\,000\,000\,000\,000\,000\,000)_2$, die Charakteristik durch $c = 127 + 11 = 138 = (10\,001\,010)_2$.

12. Die erste Bitfolge stellt $-3,0$; die zweite $-1,125 \cdot 2^{33}$ dar.

13. $2b^p(e_{max} - e_{min} + 1)$ Zahlen

14. Die kleinste Zahl ist
    $$-0.\underbrace{00\ldots00}_{(p-1)-mal}1 \cdot b^{e_{min}},$$
    die größte ist
    $$0.\underbrace{(b-1)(b-1)\ldots(b-1)(b-1)}_{p-mal} \cdot b^{e_{max}}.$$
    Die kleinste Zahl für IEC single ist $-0.\underbrace{00\ldots00}_{23-mal}1 \cdot 2^{-125}$, die größte $0.\underbrace{11\ldots11}_{24-mal} \cdot 2^{128}$.

    IEC double berechnet man analog.

15. Bei der „Rückwärtsiteration" wird der Fehler, der durch eine ungenaue Zahldarstellung entsteht mit $\frac{1}{(50-30)!}$, bei der Vorwärtsiteration mit 30! multipliziert.