Kapitel 11

Lineare Abbildungen

Verständnisfragen

Sachfragen

1. Was ist eine lineare Abbildung?
2. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Unterräumen, linearer Unabhängigkeit und linearen Abbildungen!
3. Was ist der Rang einer linearen Abbildung?
4. Wann ist eine lineare Abbildung injektiv?
5. Wann sind zwei Vektorräume isomorph?
6. Ist die Verkettung von linearen Abbildung linear?
7. Wie lautet die Inverse der Verkettung zweier linearer Abbildungen?
8. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Basisvektoren und linearen Abbildungen!
9. Wie kann die Matrixdarstellung einer linearen Abbildung aufgestellt werden?
10. Was ist ein affiner Raum?
11. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Vektorräumen und affinen Räumen!
12. Was ist eine affine Kombination?
13. Ist die Summe zweier Punkte in einem affinen Raum unabhängig vom Koordinatensystem?
14. Was versteht man unter baryzentrischen Koordinaten?
15. Wann ist eine Abbildung affin?
16. Wie kann eine affine Abbildung mit Hilfe einer Matrix dargestellt werden?
17. Nennen Sie Beispiele von affinen Abbildungen!
18. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen linearen und affinen Abbildungen!
19. Wie lautet die lineare Abbildung, die zu einer gegebenen invertierbaren affinen Abbildung im A^3 Vektoren abbildet?

20. Ist die Verkettung affiner Abbildung kommutativ?
21. Wann ist eine quadratische Matrix diagonalisierbar?
22. Wann ist eine quadratische Matrix durch eine orthogonale Matrix diagonalisierbar?
23. Welche Eigenschaft besitzen die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix?
24. Wie lautet die Singulärwertzerlegung einer rechteckigen Matrix?
25. Was ist eine quadratische Form?
26. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen quadratischen Formen und Kegelschnitten!
27. Wie kann mit Hilfe einer quadratischen Form entschieden werden, welche Form der zugehörige Kegelschnitt besitzt?
28. Was versteht man unter einer Hauptachsentransformation?

Methodenfragen

1. Überprüfen können, ob eine gegebene Abbildung linear ist.
2. Den Rang einer linearen Abbildung bestimmen können.
3. Den Kern einer linearen Abbildung bestimmen können.
4. Entscheiden können, ob eine lineare Abbildung injektiv oder surjektiv ist.
5. Eine lineare Abbildung invertieren können.
6. Die Inverse einer Verkettung zweier linearer Abbildungen bilden können.
7. Die Matrixdarstellung einer gegebenen linearen Abbildung aufstellen können!
8. Mit Punkten und Vektoren in affinen Räumen arbeiten können.
9. Konvexkombinationen und affine Kombinationen bilden können.
10. Mit homogenen Koordinaten formal umgehen können.
11. Affine Abbildungen mit homogenen Koordinaten und Matrizen anwenden können.
12. Die Verkettung affiner Abbildungen bilden können.
13. Die Verkettung affiner Abbildungen von rechts nach links lesen und anschaulich interpretieren können.
14. Eine Matrix diagonalisieren können.
15. Eine symmetrische Matrix diagonalisieren können.
16. Die Singulärwertzerlegung einer rechteckigen Matrix bestimmen können.
17. Die quadratische Form eines Kegelschnitts aufstellen können.
18. Hauptachsentransformationen für Kegelschnitte durchführen können.

Übungsaufgaben

1. Ist die Abbildung $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 - x_2)^T$ linear?

   Lösung:
   Sind (x_1, x_2), (y_1, y_2) zwei Vektoren, dann gilt $T((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = ((x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2), 3(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2))$. Dies stimmt mit $T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2)$ überein. Analog können Sie $\lambda T(x_1, x_2) = T(\lambda x_1, \lambda x_2)$ nachweisen.

   Die Matrixdarstellung ist
   $$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Sind die Abbildungen $T: U \to \mathbb{R}$ mit $T(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ und $K: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $K\mathbf{x} = \mathbf{x} \times \mathbf{x}_0$ mit einem festen Vektor $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ linear?

   Lösung:
   T ist nicht linear; sonst müsste für eine Norm in der Dreiecksungleichung immer $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ gelten. Das ist aber nicht der Fall.

   K ist linear, das folgt aus den Eigenschaften des Vektorprodukts.

3. $B = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} = \{(1,2,1)^T, (2,9,0)^T, (3,3,4)^T\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Stellen Sie eine Matrixdarstellung für die lineare Abbildung $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit
   $$F(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F(\mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, F(\mathbf{x}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   auf, falls in $\mathbb{R}^2$ die kanonischen Basisvektoren als Basis verwendet werden!

   Lösung:
   Sie erinnern sich, *die Bilder der Basis sind die Spaltenvektoren der darstellenden Matrix*:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Abbildung $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(\mathbf{e}_1) = (1,2,1)^T$, $F(\mathbf{e}_2) = (1,0,-2)^T$ bezüglich der kanonischen Basen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$! Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der gleichen Abbildung zu den Basen $B_2 = \{(1,1)^T, (1,2)^T\}$, $B_3 = \{(0,1,1)^T, (1,0,1)^T, (1,1,0)^T\}$!

   Lösung:
   Sie erinnern sich, *die Bilder der Basis sind die Spaltenvektoren der darstellenden Matrix*!

   Bezüglich der kanonischen Basis ist dann die Matrix durch
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
   gegeben.

   Wenn Sie die jeweiligen Basistransformationsmatrizen und Inversen bilden und entsprechend ausmultiplizieren, dann erhalten Sie bezüglich den angegebenen Basen die Matrixdarstellung.

Sie müssen zuerst von B_2 in die kanonischen Basisvektoren umrechnen, diese Matrix ist gegeben durch

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann gehen Sie mit A nach $\mathbb{R}^3$ mit den kanonischen Basisvektoren; und abschließend müssen Sie diese Basiskoeffizienten in die Basis B_3 umrechnen. Diese letzte Umrechnung ist gegeben durch

$$\Phi_3^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die darstellende Matrix ist dann als Matrixprodukt $\Phi_3^{-1} A \Phi_2$ gegeben:

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Welche darstellende Matrix hat die Summe von zwei linearen Abbildungen $F + G$?

   Lösung:
   Die Spaltenvektoren der Matrix sind die Bilder der Basisvektoren. Für einen Basisvektor $\mathbf{x}$ gilt aber $(F + G)(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})$.

   Dann ist die darstellende Matrix als Summe der darstellenden Matrizen gegeben.

6. Beweisen Sie, dass eine 2×2 Matrix A genau dann orthogonal ist, wenn sie die Form $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$ aufweist!

   Lösung:
   „$\Leftarrow$“:
   Es ist $-\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\varphi) = 0$ und $-\cos(\varphi)\sin(\varphi) + (-\sin(\varphi))(-\cos(\varphi)) = 0$. Die Längen der Spaltenvektoren für beide angegebenen Matrizen sind immer 1, da $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$ ist.

   „$\Rightarrow$“:
   Die Spaltenvektoren der orthogonalen Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ müssen die Länge 1 haben. Also können Sie die Vektoren in Polarkoordinaten darstellen, es ist $r = 1$.

   Der Winkel φ ist gegeben durch

$$\varphi = \begin{cases} \arccos(a_{11}), & a_{21} \geq 0, \\ -\arccos(a_{11}), & a_{21} < 0. \end{cases}$$

   Für $a_{21} \geq 0$ ist dann die erste Spalte gegeben durch $a_{11} = \cos(\varphi)$, $a_{21} = \sin(\varphi)$. Im Fall $a_{21} < 0$ ist die erste Spalte gegeben durch $a_{11} = \cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ und $a_{21} = \sin -(\varphi) = -\sin(\varphi)$.

   Auch für die zweite Spalte muss es analog einen Winkel ψ geben, so dass der Spaltenvektor mit Hilfe von Polarkoordinaten entsprechend dargestellt werden kann. Darüberhinaus soll die Matrix orthogonale Spaltenvektoren haben. Dann muss aber $\psi = \varphi \pm 90°$ erfüllt sein!

   Im Fall $\psi = \varphi + 90°$ gilt dann $\cos(\varphi + 90°) = -\sin(\varphi)$ und $\sin(\varphi + 90°) = \cos(\varphi)$, für $\psi = \varphi - 90°$ entsprechend $\cos(\varphi - 90°) = \sin(\varphi)$ und $\sin(\varphi - 90°) = -\cos(\varphi)$.

7. Geben Sie eine affine Abbildung an, die das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (2,1), (3,0)$ auf ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel im Punkt $(1,1)$ abbildet!

   Lösung:
   In einem ersten Schritt kann eine Scherung bestimmt werden, die das gegebene Dreieck auf ein Dreieck abbildet, das in $(0,0)$ einen rechten Winkel hat. Anschließend wird einfach eine Translation hinzugefügt.

   Die Scherung hat die Matrixdarstellung

$$SH = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Der Punkt $(2,1)$ wird auf einen Punkt auf der y-Achse abbilden, dann muss also

$$2 + \sigma_1 = 0$$

   erfüllt sein. Daraus ergibt sich $\sigma_1 = 2$. Der Punkt $(3,0)$ muss gleichzeitig auf einen Punkt auf der x-Achse abgebildet werden, daraus ergibt sich

$$3\sigma_2 = 0$$

   und $\sigma_2 = 0$. Dann ist die Scherung gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Die Translation um $\mathbf{t} = (1,1)^T$ kann noch hinzugefügt werden, insgesamt ergibt sich die affine Abbildung

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Eine Reflexion an der y-Achse im A^3 ist gegeben durch die 4×4-Matrix

$$Ref_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Stellen Sie die Matrix-Darstellung der Reflexion an einer beliebigen im Raum liegenden Linie, die durch den Ursprung geht, auf!

   Lösung:
   Durch eine Koordinatentransformation wird die Gerade durch den Ursprung auf die y-Achse abgebildet; dann die Reflexion durchgeführt und anschließend wieder die Koordinatentransformation rückgängig gemacht. Die Koordinatentransformation beschreiben wir durch die beiden Winkel φ und θ. φ beschreibt den Winkel zwischen der y-Achse und der Achse in der xy-Ebene, θ den Winkel zwischen y-Achse und der Achse in der yz-Ebene. Dann ist die allgemeine Reflexion an einer Achse gegeben durch $R_x(-\theta)R_z(\varphi)Ref_xR_z(-\varphi)R_x(-\theta)$:

$$Ref_y = \begin{pmatrix} \cos\theta^2 \cos 2\varphi - \sin\theta^2 & \cos\theta \sin 2\varphi & -\sin 2\theta \sin\varphi^2 \\ \cos\theta \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & \sin\theta \sin 2\varphi \\ -\sin 2\theta \sin\varphi^2 & \sin\theta \sin 2\varphi & \cos\theta^2 + \sin\theta^2 \cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

Setzen Sie $\theta = \varphi = 0$, dann erhalten Sie Ref_y zurück. Interessant ist der Fall $\theta = 0$, einer Reflexion an einer Achse in der yz-Ebene:

$$Ref_{(\theta=0)} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) & 0 \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Leiten Sie die Matrix-Darstellung der Rotation um eine beliebige Achse im Raum mit Hilfe von Kugelkoordinaten und Matrix-Algebra her!

Lösung:
Analog zur Lösung von Aufgabe 8 wird die Drehachse durch die beiden Winkel φ, θ beschrieben. Also wird die Drehachse auf eine Koordinatenachse transformiert, dann die Drehung durchgeführt und anschließend wieder zurückgedreht. Entscheidet man sich für die x-Achse, dann benötigt man den Winkel φ in der xy-Ebene und den Winkel θ in der xz-Ebene. Die Drehung der Achse auf die x-Achse ist dann durch die Rotationen $R_y(-\theta)$ und $R_z(-\varphi)$ gegeben.
Dann ist die allgemeine Rotation mit Winkel β gegeben durch

$$R_y(\theta)R_z(\varphi)R_x(\beta)R_z(-\varphi)R_y(-\theta).$$

Haben Sie sich dazu entschieden, die Drehachse auf die y oder z-Achse zu drehen, ergibt sich ein anderen Ausdruck, aber das gleiche Endergebnis.

10. Gegeben ist eine beliebige Kombination von Punkten in einem affinen Raum: $P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$. Weisen Sie nach, dass P ein Punkt ist im Fall $\sum \lambda_i = 1$ und ein Vektor im Fall $\sum \lambda_i = 0$! Hat die Kombination einen Sinn für andere Werte der Summe $\sum \lambda_i$?

Lösung:
Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \end{pmatrix}.$$

falls die Punkte gegeben sind durch $X_i = (\mathbf{x}_i, 1)^T$. Für $\sum \lambda_i = 1$ erhält man einen Punkt für die affine Kombination. Ist die Summe $\sum \lambda_i = 0$, dann ist das Ergebnis ein Vektor. Hat die Summe einen Wert $\sum \lambda_i \neq 0$, dann kann durch diesen Wert dividiert werden; das Ergebnis ist ein Punkt.

11. Diagonalisieren Sie die Matrizen $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -7 & 24 & 0 & 0 \\ 24 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 24 \\ 0 & 0 & 24 & 7 \end{pmatrix}$!

Lösung:
Die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ sind gegeben durch 2 und 4. Der Eigenvektor zu $\lambda_1 = 4$ ist gegeben durch $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1,1)^T$, der Eigenvektor zu $\lambda_2 = 2$ ist $\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1,1)^T$. Also ist die Matrix diagonalisierbar, sie ist ähnlich zu $diag(4,2)$.

Auch $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar, sie hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -50$, $\lambda_2 = -3$ und $\lambda_3 = 25$ mit den Eigenvektoren $(3,0,4)^T$, $(0,1,0)^T$ und $(-4,0,3)^T$.

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ mit den linear unabhängigen Eigenvektoren $(1,1,1)^T$, $(-1,0,1)^T$ und $(-1,1,0)^T$. Dann ist sie ähnlich zu $diag(0,3,3)$.

$\begin{pmatrix} -7 & 24 & 0 & 0 \\ 24 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 24 \\ 0 & 0 & 24 & 7 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -25$ und $\lambda_2 = 25$ mit den linear unabhängigen Eigenvektoren $(0,0,-4,3)^T$, $(-4,3,0,0)^T$, $(0,0,3,4)^T$ und $(3,4,0,0)^T$. Die Matrix ist dann ähnlich zu $diag(-25,-25,25,25)$.

12. Diagonalisieren Sie die Matrix $A = I_3 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T$ für $\mathbf{v} = (1,0,1)^T \in \mathbb{R}^3$!

Lösung:
Die Matrix ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$ mit den linear unabhängigen Eigenvektoren $(1,0,1)^T$, $(-1,0,1)^T$ und $(0,1,0)^T$.

Dann ist A ähnlich zu $diag(-1,1,1)$.

13. Beweisen Sie, dass für jeden Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, die Matrix $I_n - \beta\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ diagonalisierbar ist!

Lösung:
Der Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ist ein Eigenvektor der Abbildung, denn es gilt

$$(I_n - \beta\mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{v} = (1 - \beta\|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{v}.$$

Jeder zu $\mathbf{v}$ orthogonale Vektor $\mathbf{x}$ wird auf $\mathbf{0}$ abgebildet, denn es ist dann $\mathbf{v}^T\mathbf{x} = 0$. Zu $\mathbf{v}$ können Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren $n-1$ orthogonale und linear unabhängige Vektoren bilden. Diese spannen den Kern der Abbildung auf und gehören zum Eigenwert 0. Dann ist die Abbildung aber diagonalisierbar!

14. Gegeben ist die Diagonalmatrix $D = diag(-1,3,3)$, $\mathbf{v}_1 = (2,-1,1)^T$, $V_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $(W_1, W_2)^T = (\mathbf{v}_1|V_2)^{-1}$. Weisen Sie nach, dass $-\mathbf{v}_1 W_1 + 3V_2 W_2$ zu D ähnlich ist!

Lösung:
Der Ausdruck ergibt die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

Diese Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Die Eigenvektoren $(2,-1,1)^T$, $(1,0,1)^T$ und $(1,1,0)^T$ sind linear unabhängig, dann ist A ähnlich zu D.

15. Bestimmen Sie die zugehörige quadratische Form für $x^2 + y^2 - z^2 + 4xy - 5yz$.

Lösung:
Für $n = 3$ ist eine quadratische Form für die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{smallmatrix}\right)$ identisch mit einem Ausdruck $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$.

Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

16. Wenden Sie die Hauptachsentransformation auf die quadratischen Formen $2x^2 + 2y^2 - 2xy$ und $-3x^2 + 5y^2 + 2xy$ an! Welche Kegelschnitte gehören zu diesen quadratischen Formen?

Lösung:
Wir müssen die Matrix A ablesen und diagonalisieren.

Für $2x^2 + 2y^2 - 2xy$ ist die Matrix A gegeben als

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ und die Eigenvektoren $(1,1)^T$, $(-1,1)^T$. Also ist A diagonalisierbar. Es liegt eine Ellipse vor.

Für die zweite Form ist die Matrix gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1 - \sqrt{17}$ und $\lambda_2 = 1 + \sqrt{17}$ mit den linear unabhängigen Eigenvektoren $(-4 - \sqrt{17}, 1)^T$ und $(-4 + \sqrt{17}, 1)^T$. Die Diagonalmatrix hat also zwei von Null verschiedene Werte unterschiedlichen Vorzeichens, also liegt eine Hyperbel vor!

17. Eine Matrix heißt *nilpotent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^n = 0$. Was können Sie über die Eigenwerte einer nilpotenten Matrix aussagen?

    Lösung:
    Alle Eigenwerte einer nilpotenten Matrix sind Null.

    Nehmen wir das Gegenteil an, dann existiert ein $\lambda \neq 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ mit $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ und $A^n\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ein Widerspruch.

18. Weisen Sie nach, dass für jede $m \times n$-Matrix A die Matrizen A^TA und AA^T die gleichen Eigenwerte besitzen!

    Lösung:
    Wenn A die Singulärwertzerlegung UDV besitzt, dann gilt $AA^T = UD^2U^T$ und $A^TA = V^TD^2V$. Beide Matrizen sind diagonalisierbar, die Quadrate der singulären Werten von A sind jeweils die Eigenwerte.

19. Bestimmen Sie eine Matrix P, die für eine $m \times n$-Matrix A die Gleichung $P^2 = A^TA$ erfüllt!

    Lösung:
    Wenn A die Singulärwertzerlegung UDV besitzt, dann gilt $A^TA = V^TD^2V$. Die Matrix $P = V^TDV$ erfüllt die gegebene Gleichung.

20. Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und lösen Sie damit das lineare Ausgleichsproblem mit der rechten Seite $\mathbf{b} = (2, 0, 0, -1)^T$!

    Lösung:
    Der Rang der Matrix A ist offensichtlich 1. Die Matrix A^TA ist gegeben durch

    $$A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

    Diese Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 8$ und $\lambda_2 = 0$; zu λ_1 gehört der Eigenvektor $(1,1)^T$, zu λ_2 der Eigenvektor $(-1,1)^T$.

    Dann ist der Singulärwert $\mu_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2\sqrt{2}$. Die Matrix V ist gegeben durch Orthonormalisieren der beiden Eigenvektoren, die die Spalten definieren. Insbesondere ist dann

    $$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

    $\mathbf{u}_1$ ist gegeben durch $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\mu_1} A\mathbf{v}_1$, dann gilt

    $$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Ausgleichsproblems ist dann gegeben durch

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T U^T \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{b} \rangle \mathbf{v}_i,$$

in unserem Fall ist $r = 1$ und die Lösung ist gegeben durch

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$