Kapitel 13

Differenzialrechnung

Verständnisfragen

Sachfragen

1. Nennen Sie Beispiele für polynomiale, rationale, algebraische und transzendente Funktionen!
2. Erläutern Sie den Funktionenlimes!
3. Erläutern Sie den Begriff einer Asymptote einer Funktion!
4. Wie lautet das ε-δ-Kriterium für den Funktionenlimes einer Funktion!
5. Erläutern Sie den Begriff der Stetigkeit!
6. Wann ist eine Funktion monoton?
7. Wann ist eine Funktion beschränkt?
8. Wie lautet der Zwischenwertsatz?
9. Erläutern Sie das Bisektionsverfahren!
10. Erläutern Sie die Regula-Falsi!
11. Erläutern Sie die Nullstellenbestimmung durch quadratische Interpolation!
12. Wann ist eine Funktion differenzierbar?
13. Wie hängen Differenzierbarkeit und Stetigkeit einer Funktion zusammen?
14. Wie lautet die Produkt- und Quotientenregel?
15. Wie lautet die Kettenregel?
16. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der Ableitung einer Funktion und der Ableitung ihrer Umkehrfunktion!
17. Erläutern Sie das Newton-Verfahren.
18. Erläutern Sie den Begriff der Konvergenzordnung!
19. Wie lautet der Satz von Rolle?

20. Wie lautet der Mittelwertsatz?
21. Erläutern Sie die Näherung einer Funktion durch ein Taylor-Polynom!
22. Wie lautet die Laplace-Form des Restglieds bei der Taylor-Entwicklung?
23. Nennen Sie einige Beispiele für Taylorreihen!
24. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Potenzreihen und Taylorreihen!
25. Wann ist eine Funktion konvex bzw. konkav?
26. Was ist ein lokales Maximum bzw. Minimum einer Funktion?
27. Nennen Sie ein notwendiges und ein hinreichendes Kriterium für ein lokales Extremum einer differenzierbaren Funktion!
28. Was versteht man unter einem Wendepunkt?
29. Wie können die Wendepunkte einer differenzierbaren Funktion bestimmt werden?

Methodenfragen

1. Transformationen für Funktionen durchführen können.
2. Funktionenlimites berechnen können.
3. Asymptoten für gegebene Funktionen bestimmen können.
4. Das ε-δ-Kriterium für eine gegebene Funktion anwenden können.
5. Überprüfen können, ob eine gegebene Funktion stetig ist.
6. Eine gegebene Funktion auf Monotonie und Beschränktheit überprüfen können.
7. Das Bisektionsverfahren anwenden und implementieren können.
8. Die Regula Falsi anwenden und implementieren können.
9. Die Nullstellenbestimmung durch quadratische Interpolation anwenden und implementieren können.
10. Eine gegebene Funktion ableiten können.
11. Die Ableitungsregeln, insbesondere die Kettenregel, anwenden können.
12. Die Ableitung einer Umkehrfunktion berechnen können.
13. Das Newton-Verfahren anwenden und implementieren können.
14. Das Taylor-Polynom einer Funktion aufstellen können.
15. Monotonie von differenzierbaren Funktionen untersuchen können.
16. Das Krümmungsverhalren von differenzierbaren Funktionen untersuchen können.
17. Lokale Extrema von differenzierbaren Funktionen bestimmen können.
18. Wendepunkte von differenzierbaren Funktionen bestimmen können.

Übungsaufgaben

1. In Abbildung 13.1 ist ein Graph einer Funktion f gegeben. Verwenden Sie diesen, um die Graphen der folgenden Funktionen zu skizzieren: $f(2x)$, $f(-x)$, $-f(-x)$, $f(x+4)$, $f(x)+4$, $2f(x)+3$.

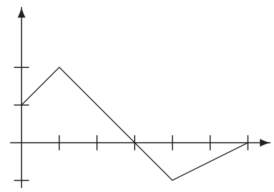


Abbildung 13.1: Ein Funktionsgraph für Aufgabe 1

Lösung:
Lösung.

2. Berechnen Sie die Funktionenlimites (falls sie existieren) für die Funktionen $f(x) = \frac{x^2+8}{x+4}$, $x_0 = -4$; $g(x) = \frac{x^2+7x+10}{x^2-x-6}$, $x_0 = -2$ und $h(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 0$.

Lösung:
f hat einen Pol in $x_0 = -4$, g hat an der Stelle $x_0 = -2$ einen Grenzwert, denn der Zähler hat die beiden Nullstellen $x = 5$ und $x = -2$; das Nennerpolynom die Nullstellen $x = 3$ und ebenfalls $x = -2$. Also kann g geschrieben werden als

$$g(x) = \frac{(x+5)(x+2)}{(x-3)(x+2)}.$$

Dann ist der Funktionenlimes für $x_0 = -2$ gegeben als

$$\lim_{x\to-2} \frac{x+5}{x-3} = -\frac{3}{5}.$$

h hat eine Unendlichkeitsstelle bei $x_0 = 0$.

3. Beweisen Sie, dass $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x_0 = 0$ keinen Funktionenlimes besitzt!

Lösung:
Das Argument $\frac{1}{x}$ geht gegen Unendlich, die Sinus-Funktion hat aber keine Asymptote für $x \to \infty$.

4. Bestimmen Sie die Asymptoten für $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$ und $g(x) = \frac{1+x^2+2x^3}{2+x^2}$.

Lösung:
Für $f(x)$ erhalten Sie durch Ausklammern der höchsten Potenz

$$f(x) = \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} \to 2$$

sowohl für $x \to \infty$ als auch $x \to -\infty$.

Für $g(x)$ erhalten Sie durch Ausklammern der höchsten Potenz

$$g(x) = \frac{2x+1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}.$$

Für $x \to \infty$ hat g ∞ als Grenzwert, im negativen ist der Grenzwert $-\infty$.

5. Bestimmen Sie die Unendlichkeitsstellen der Funktion $f(x) = \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}$.

   Lösung:
   Die Unendlichkeitsstellen sind die Nullstellen des Nenners. Diese sind gegeben durch die Nullstellen der Sinus- und der Kosinusfunktion, also $x = k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

6. Beweisen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

   Lösung:
   Zuerst wird ein Wert für δ geschätzt. Gesucht ist eine Zahl δ mit $|x^2 - 9| < \varepsilon$ für $0 < |x-3| < \delta$.

   Mit der dritten binomischen Formel ist

   $$|x^2 - 9| = |x-3||x+3|.$$

   Falls $x \in (2;4)$ liegt, dann gilt $5 < x+3 < 7$ und $|x+3| < 7$.

   Jetzt gibt es zwei Bedingungen an x, nämlich

   $$|x-3| < 1, |x-3| < \frac{\varepsilon}{7}.$$

   Dann kann für den Grenzwert als δ das Minimum zwischen 1 und $\frac{\varepsilon}{7}$ verwendet werden.

7. Zwischen welchen Zahlen liegt eine positive Nullstelle von $f(x) = x^3 - 1\,000x - 500\,000$?

   Lösung:
   In $[0, 10^4]$, denn dort sind die Voraussetzungen des Zwischenwertsatzes erfüllt.

8. Implementieren Sie das Bisektionsverfahren und Regula Falsi und bestimmen Sie damit auf zwei und vier Dezimalstellen genau die im Intervall $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ liegende Lösung von $5\sin(x) = x$.

   Lösung:
   In diesem Kapitel folgen noch einige Aufgaben mit verschiedenen Algorithmen. Deshalb werden zuerst virtuelle Klassen implementiert, von denen dann die konkreten Algorithmen abgeleitet werden. In diesen konkreten Algorithmen ist auch die Beispielfunktion, hier $f(x) = 5\sin(x) - x$ implementiert. Einen Graphen der Beispielfunktion finden Sie in Abbildung 13.2.

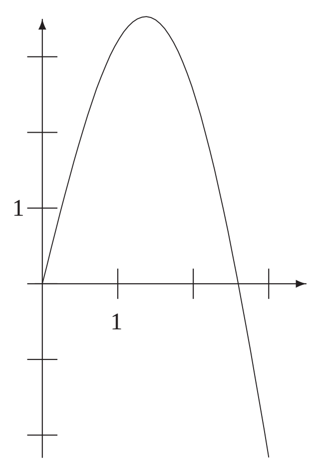


Abbildung 13.2: Die Funktion $f(x) = 5\sin(x) - x$

```
//-----------------------------------------------------------
// nullstellenAlgorithmus.java
// Virtuelle Oberklasse für die Algorithmen für
// die Bestimmung von Nullstellen eindimensionaler Funktionen.
// -----------------------------------------------------------
// Autor: Manfred Brill
// Letzte Änderung: 14. 11. 2004
//-----------------------------------------------------------
public abstract class nullstellenAlgorithmus {

    protected double epsilon; // Abbruchgenauigkeit
    protected double startwert; // Auswertestelle

    protected abstract double funktion(double x); // Funktionsprototyp

    public abstract double berechne();
    // Hier wird der jeweilige Algorithmus implementiert.
    public nullstellenAlgorithmus() {
        epsilon = 1.0E-3;
        startwert = 0.0;
    }

    public nullstellenAlgorithmus(double eps, double start) {
        epsilon = eps;
        startwert = start;
    }

    public nullstellenAlgorithmus(double eps) {
        epsilon = eps;
        startwert = 0.0;
    }

    public void setStartwert(double x) {
        startwert = x;
    }

    public void setEpsilon(double eps) {
        epsilon = eps;
    }

    public double getStartwert() {
        return startwert;
    }

    public double getEpsilon() {
        return epsilon;
    }
}
```

Die Bisektion wird jetzt hiervon abgeleitet:

```
public class bisektion extends nullstellenAlgorithmus {
    private double xlinks, xrechts;
    private int maxIter, aktIter; // Integer-Variable für "Notbremse"

    public bisektion() {
        xlinks = 0.0;
        xrechts = 1.0;
        startwert=0.5;
```

```
        epsilon=1.0E-3;
        maxIter = 50;
        aktIter = 0;
    }

    public bisektion(double links, double rechts, double eps) {
        xlinks = links;
        xrechts = rechts;
        epsilon = eps;
        startwert = 0.5*(links + rechts);
        maxIter = 50;
        aktIter = 0;
    }

    public bisektion(double links, double rechts) {
        xlinks = links;
        xrechts = rechts;
        epsilon = 1.0E-3;
        startwert = 0.5*(links + rechts);
        maxIter = 50;
        aktIter = 0;
    }

    public void setMaxIter(int max) {
        maxIter = max;
    }

    public double funktion(double x) {
        return 5.0*Math.sin(x) - x;
    }

    public int getAnzahlIterationen() {
        return aktIter;
    }

    public double berechne() {
        int counter=0;
        double xmid, dx, fmid, f, result;

        f = funktion(xlinks);
        fmid = funktion(xrechts);

        if (f*fmid >= 0) {
            System.out.println("Keine Klammer übergeben für Bisektion");
            return xlinks;
        }

        if (f < 0) {
            // Orientieren
            result = xlinks;
            dx = xrechts - xlinks;
        }
        else {
            result = xrechts;
            dx = xlinks - xrechts;
        }

        // Schleife für die Bisektion
```

```
        while ((counter <= maxIter)&&
                ((Math.abs(dx)>=epsilon)||(Math.abs(fmid)>=epsilon))) {
            dx = 0.5*dx;
            xmid = result + dx;
            fmid = funktion(xmid);
            counter++;
            if (fmid <= 0.0) result = xmid;
        }
        aktIter = counter;

        return result;
    }
}
```

Für $\varepsilon = 0,05$ erhält man dann die folgende Ausgabe:

```
Die berechnete Lösung der Bisektion: 2.6016314162540475
Die Abbruchgenauigkeit war 0.05.
Es wurden 5 Iterationen durchgeführt.
Der Funktionswert an der Lösung:
-0.031117695287938396.
```

$\varepsilon = 0.0005$ ergibt:

```
Die berechnete Lösung der Bisektion: 2.5958789882994764
Die Abbruchgenauigkeit war 5.0E-4.
Es wurden 13 Iterationen durchgeführt.
Der Funktionswert an der Lösung:
-7.378228040719748E-4.
```

Für die Regula Falsi wird eine entsprechende Klasse `regulaFalsi` implementiert; dabei unterscheidet sich nur die Funktion `regulaFalsi.berechne()` von der Klasse `bisektion`.

```
    public double berechne() {
        int counter=0;
        double xs, dx,  x1, y1, fx, fy;

        x1 = xlinks;
        y1 = xrechts;

        fx = funktion(x1);
        fy = funktion(y1);

        if (fx*fy >= 0) {
            System.out.println("Keine Klammer übergeben für die Regula False");
            return xlinks;
        }
        fx = funktion(x1);
        fy = funktion(y1);

        // Schleife für die Bisektion
        while ((counter <= maxIter)&&((fx>=epsilon)||fy >= epsilon)) {

            xs = x1 - fx*((y1-x1)/(fy-fx));
            if (fx*funktion(xs)<0.0) {
                y1 = xs;
                fy = funktion(xs);
            }
            else {
                x1 = xs;
```

```
                fx = funktion(xs);
            }
            counter++;
        }
        aktIter = counter;

        return 0.5*(x1+y1);
    }
```

Mit Abbruchgenauigkeit $\varepsilon = 0,05$ erhält man dann die Ausgabe

```
Die berechnete Lösung der Regula Falsi: 2.593950915988187
Die Abbruchgenauigkeit war 0.05.
Es wurden 3 Iterationen durchgeführt.
Der Funktionswert an der Lösung:
0.009425588181722677.
```

Abbruchgenauigkeit $\varepsilon = 0,0005$:

```
Die berechnete Lösung der Regula Falsi: 2.5957265157620166
Die Abbruchgenauigkeit war 5.0E-4.
Es wurden 5 Iterationen durchgeführt.
Der Funktionswert an der Lösung:
6.625448183594784E-5.
```

9. Motivieren Sie die Fallunterscheidung für die Bestimmung von h bei der Nullstellenbestimmung durch quadratische Interpolation!

Lösung:
Bei einer Iteration liegen drei Näherungswerte x_{n-2}, x_{n-1} und x_n mit zugehörigen Funktionswerten $y_{n-2} = f(x_{n-2}), y_{n-1} = f(x_{n-1}), y_n = f(x_n)$ vor. Dabei ist der Punkt x_n die beste Näherung. Wir setzen ein quadratisches Polynom an durch

$$p_2(x) = C + B(x - x_n) + A(x - x_n)^2.$$

Aus den Interpolationsbedingungen erhält man schnell

$$A = \frac{h_1 d_2 - h_2 d_1}{h_2 h_1 (h_2 - h_1)},$$
$$B = \frac{h_2^2 d_1 + h_1^2}{h_2 h_1 (h_2 - h_1)}, C = y_n,$$

mit den Hilfsgrößen

$$h_2 = x_{n-2} - x_n, h_1 = x_{n-1} - x_n,$$
$$d_2 = y_{n-2} - y_n, d_1 = y_{n-1} - y_n.$$

Jetzt berechnen wir eine neue Näherung x_{n+1} durch den Ansatz $h = x_{n+1} - x_n$. Dazu bestimmen wir h so, dass h eine Nullstelle des quadratischen Polynoms

$$C + Bh + Ah^2 = 0$$

ist. Der Fall $A = B = 0$ tritt nur dann auf, wenn $y_{n-2} = y_{n-1} = y_n$ ist, den wir vernachlässigen können. Ist $A = 0$ und $B \neq 0$, erhält man nur eine Lösung für h, die drei aktuellen Näherungen liegen auf einer Geraden. Für $A \neq 0$ und $B = 0$ erhält man zwei Lösungen für h, wir wählen willkürlich eine der beiden aus.

Im allgemeinen Fall erhält man zwei Lösungen, wobei man für die Berechnung von x_{n+1} die mit dem kleineren Betrag benutzt. Insgesamt:

$$h = \begin{cases} -\frac{C}{B} & A = 0, B \neq 0, \\ \sqrt{-\frac{C}{A}} & A \neq 0, B = 0, \\ \frac{-2sgn(B)C}{|B|+\sqrt{B^2-4AC}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei bezeichnet $sgn(B)$ das Vorzeichen der Zahl B.

10. Implementieren Sie die Nullstellenbestimmung mit Hilfe von quadratischer Interpolation und bestimmen Sie damit auf zwei und vier Dezimalstellen genau die im Intervall $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ liegende Lösung von $5 \sin(x) = x$.

Lösung:
Eine grafische Darstellung der Funktion finden Sie in Abbildung 13.2 auf 157.

Mit Hilfe der in Aufgabe 8 implementierten Klassen wird eine Klasse für den Algorithmus `quadratischeInterpolation` abgeleitet; wichtig ist die `berechne`-Funktion:

```
    public double berechne() {
        int counter=0;
        double a, b, c, d, e, fa, fb, fc, p, q, r, s, xm;

        a = xlinks;
        b = xrechts;
        fa = funktion(a); fb = funktion(b);
        if (fa*fb > 0.0) {
            System.out.println
            ("Keine Klammer übergeben für quadratische Interpolation");
            return xlinks;
        }
        c = b;
        fc = fb;
        xm = 0.5*(a+b);
        e = 1.0; d = e;
        // Schleife für die Bisektion
        while (counter <= maxIter&&
                (Math.abs(fb) > epsilon||Math.abs(xm)>epsilon)) {

            if ((fb > 0.0 && fc > 0.0)||(fb < 0.0&& fc < 0.0)) {
                c = a;
                fc = fa;
                d = b-a;
                e = d;
            }
            if (Math.abs(fc) < Math.abs(fb)) {
                a = b;
                b = c;
                c = a;
                fa = fb;
                fb = fc;
                fc = fa;
            }
            xm = 0.5*(c-b);

            s = fb/fa;
            if (a == c) {
                p = 2.0*xm*s;
```

```
                q = 1.0-s;
            }
            else {
                q = fa/fc;
                r = fb/fc;
                p = s*(2.0*xm*q*(q-r)-(b-a)*(r-1.0));
                q = (q-1.0)*(r-1.0)*(s-1.0);
            }
            if (p>0.0) q = -q;
            p = Math.abs(p);
            e = d;
            d = p/q;
            a = b;
            fa = fb;

            // Neuen Punkt berechnen
            b = b+d;
            fb = funktion(b);

            counter++;
        }
        aktIter = counter;
        return b;
    }
```

Für die `signum`-Funktion verwenden Sie entweder eine eigene Implementierung oder die ab `Java` 1.5 zur Verfügung stehende `Math.signum`-Funktion.

Für das Nullstellenproblem aus Aufgabe 8 mit den beiden verwendeten Abbruchgenauigkeiten erhält man folgende Ergebnisse:

```
Die berechnete Lösung der quadratischen Interpolation: 2.5957364004011003
Die Abbruchgenauigkeit war 0.05.
Es wurden 4 Iterationen durchgeführt.
Der Funktionswert an der Lösung:
1.4128800668977703E-5.

Die berechnete Lösung der quadratischen Interpolation: 2.595739079312127
Die Abbruchgenauigkeit war 5.0E-4.
Es wurden 5 Iterationen durchgeführt.
Der Funktionswert an der Lösung:
1.7806880414639181E-9.
```

11. Wo ist die Funktion $f(x) = |1+x| - |1-x|$ monoton?

    Lösung:
    Auf $[-1, 1]$ streng monoton wachsend, sonst konstant

12. Welche der folgenden Funktionen sind umkehrbar, wie lauten die Umkehrfunktionen: $f_1(x) = \sqrt{x+1}$, $f_2(x) = \sqrt{x^2+1}$, $f_3(x) = \ln|x| - x$ und $f_4(x) = \frac{x-2}{x+3}$?

    Lösung:
    $f_1^{-1}(x) = x^2 - 1$;
    $f_2^{-1}(x) = \sqrt{x^2-1}$;
    f_3 ist umkehrbar, allerdings ohne dass die inverse Funktion geschlossen darstellbar ist;
    $f_4^{-1}(x) = \frac{3x+2}{1-x}$.

13. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen: $(100 - 4x^2 + 3x)(1 + 2x^2)$, $\frac{x^2}{-1+x^2}$, $\frac{1}{-1+x} - \frac{4x}{(-1+x^2)(1+x)}$ und $\sqrt[3]{1 - x^2}$!

    Lösung:
    $3 + 392x + 18x^2 + 32x^3$; $\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$; $\frac{-1}{(x-1)^2} + 4\frac{1+x^2+2x^3}{(-1+x^2)^2(1+x)^2}$; $-\frac{2}{3}\frac{x}{(1-x^2)^{2/3}}$.

14. An welcher Stelle x_0 hat die Ableitung der Funktion $f(x) = (x-1)\ln(x)$ den Wert 1?

    Lösung:
    Die Ableitung der angegebenen Funktion ist gegeben durch

    $$f'(x) = \ln(x) + \tfrac{x-1}{x}.$$

    Die gesuchte Stelle x ist dann eine Lösung der Nullstellenaufgabe

    $$\ln(x) + \tfrac{x-1}{x} - 1 = 0.$$

    Die Funktion $g(x) = \ln(x) + \frac{x-1}{x} - 1$ hat die Funktionswerte

    $$g(1) = -1, g(2) = 0,193\,147\,181.$$

    Also muss nach dem Zwischenwertsatz im Intervall $[1; 2]$ eine Lösung liegen, das zeigt auch die Abbildung 13.3. Sie können Bisektion, Regula Falsi oder auch quadratische Interpolation verwenden, es gilt $x \sim 1,763\,211\,941$.

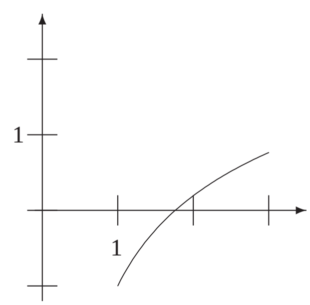


Abbildung 13.3: Die Funktion $g(x) = \ln(x) + \frac{x-1}{x} - 1$

15. Leiten Sie ab: $e^{-kx}\sin(\omega x)$, $\arcsin(\sqrt{x})$, $\arctan(x) + \operatorname{arccot}(\frac{1}{x})$ und $\arccos(1-2x)$.

    Lösung:
    $e^{-kx}(\omega\cos(\omega x) - k\sin(\omega x))$, $\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, $\frac{2}{1+x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{x(1-x}}$

16. Bestimmen Sie die Ableitungen der Hyperbelfunktionen: $\sinh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ und $\cosh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

    Lösung:
    $cosh(x), sinh(x)$

17. Implementieren Sie das Newton-Verfahren und bestimmen Sie damit auf zwei und vier Dezimalstellen genau die im Intervall $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ liegende Lösung von $5\sin(x) = x$.

    Lösung:
    Wie bereits bei den Aufgaben 8 und 10 wird eine entsprechende Klasse abgeleitet. Diese hat die folgende `berechne`-Funktion:

```
    public double berechne() {
        int counter=0;
        double x, dx, fx;

        x = startwert;
        fx = funktion(x);

        // Schleife für die Iteration
        while ((counter <= maxIter)&&
                ((Math.abs(fx)>=epsilon))) {

            x = x - fx/ableitung(x);
            fx = funktion(x);
            counter++;

        }
        aktIter = counter;
        return x;
    }
```

Für die beiden gewünschten Abbruchgenauigkeiten $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$ und $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ und Startwert $x_1 = \pi$ erhält man dann die folgenden Ergebnisse:

```
Die berechnete Lösung des Newton-Verfahrens: 2.595856717362374
Die Abbruchgenauigkeit war 0.05.
Es wurden 2 Iterationen durchgeführt.
Der Funktionswert an der Lösung:
-6.203713029453439E-4.

-----------------------------------------------------------------
Die berechnete Lösung des Newton-Verfahrens: 2.59573908305506
Die Abbruchgenauigkeit war 5.0E-4.
Es wurden 3 Iterationen durchgeführt.
Der Funktionswert an der Lösung:
-1.795737869514369E-8.
```

18. Gesucht ist eine Lösung der nichtlinearen Gleichung $e^{2x} - \sin x - 2 = 0$ mit $x \geq 0$. Verwenden Sie für die Regula Falsi die Startwerte $x_0 = 0, x_1 = 1$, für das Newton-Verfahren $x_0 = 0,25$. Vergleichen Sie die Ergebnisse!

Lösung:
Die Startwerte für die Regula Falsi sind schlecht gewählt. Wenn wie in der Lösung von Aufgabe 8 der Mittelpunkt des letzten berechneten Intervalls von der Regula Falsi zurückgegeben wird, dann erhält man nach der maximalen Anzahl der Iterationen eine sehr schlechte Näherung. Das liegt daran, dass immer nur die linke Grenze verändert wird im Verlauf des Verfahrens. Diese liegt immer näher an der gesuchten Näherung, der Korrekturterm wird immer kleiner.

Das Newton-Verfahren konvergiert schnell gegen eine Näherung:

```
Die berechnete Lösung der Regula Falsi: 0.4719103765419831
Die Abbruchgenauigkeit war 0.05.
Es wurden 10001 Iterationen durchgeführt.
Der Funktionswert an der Lösung:
0.11519249547652777.
---------------------------------
Die berechnete Lösung des Newton-Verfahrens: 0.4438497254104666
Die Abbruchgenauigkeit war 5.0E-4.
Es wurden 3 Iterationen durchgeführt.
```

```
Der Funktionswert an der Lösung:
1.1460918404848641E-4.
--------------------------------
```

19. Bestimmen Sie eine Approximation von $f(x) = \sin(2x)$ durch ein Polynom vom Grad 4 an der Entwicklungsstelle $x_0 = \frac{\pi}{6}$!

    Lösung:
    $p_4(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x-a) - \frac{\sqrt{3}}{3}(x-a)^2 - \frac{1}{6}(x-a)^3 + 15\sqrt{3}(x-a)^4$.

20. Stellen Sie das Taylorpolynom für $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ auf und schätzen Sie das Restglied ab!

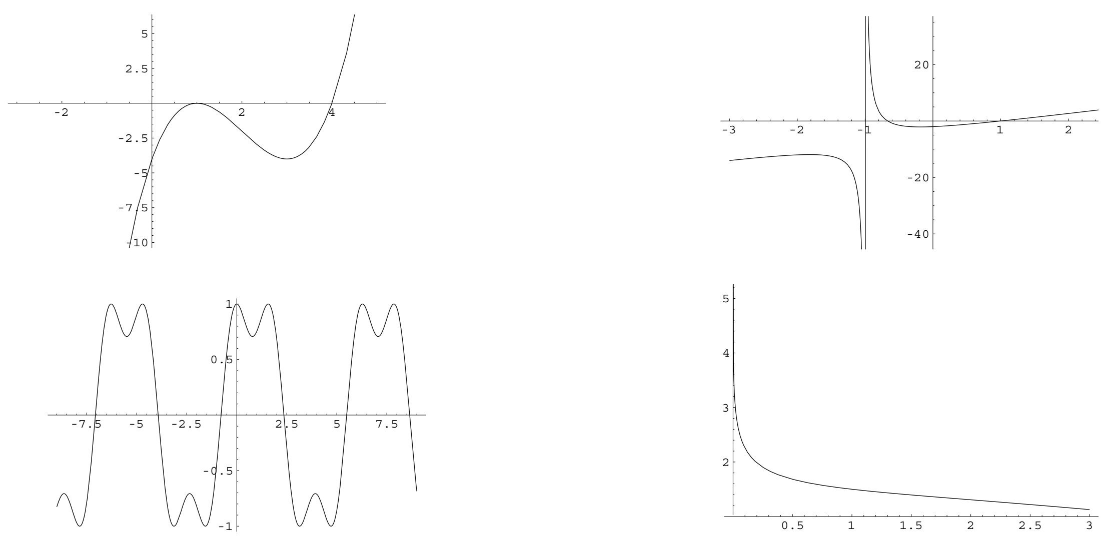
    Lösung:
    Es gilt $f^{(n)}(0) = (-2)^n(n-1)!$ und $f^{(n)}(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{(1+x)^n}$. Damit kann das Restglied abgeschätzt werden durch $\frac{2}{n+1}|x|^{n+1}$.

21. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x}$, $\lim_{x\to\infty} x(1-\cos(\frac{1}{x}))$ und $\lim_{x\to 0} \sin(x) \cdot \ln(x)$.

    Lösung:
    5; 0; 0

22. Untersuchen Sie die Funktionen $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$, $f(x) = \frac{3x^2-x-2}{x+1}$, $f(x) = \sin^3(x) + \cos^3 x$, $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x+2}{4}\ln(x+1)$ auf Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte, Krümmung, und skizzieren Sie den Graphen.

    Lösung:
    So sollte es aussehen:



23. Berechnen Sie die Lösung des Interpolationsproblems $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3, y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 3$ mit Hilfe der Lagrange-Polynome und des Newton-Algorithmus. Berechnen Sie die Funktionswerte des Interpolationspolynoms an den Stellen $x = 0,5$ und $x = 2,5$!

    Lösung:
    Die Lösung ist$p(x) = x$; daraus müssen sich durch den Neville-Algorithmus die Funktionswerte $p(0,5) = 0,5$ und $p(2,5) = 2,5$ ergeben!

24. Interpolieren Sie die Funktion $\ln(x)$ durch ein quadratisches Polynom in den Stützstellen $x = 10, 11, 12$. Schätzen Sie den Interpolationsfehler an der Stelle $x = 11,1$ ab!

    Lösung:
    $p(x) = \ln 10 + (x-10)(-\ln 10 + \ln 11 + \frac{1}{2}(x-11)(\ln 10 - 2\ln 11 + \ln 12))$.

    An der Stelle 11, 1 ist der Fehler kleiner oder gleich $3,310^{-5}$, die dritte Ableitung von ln auf $[10; 12]$ ist abschätzbar durch $\frac{1}{500}$.

25. Interpolieren Sie die Funktion $f(x) = e^{-x}$ durch Hermite-Interpolation an den Stellen $x_0 = 0,3$ und $x_1 = 0,4$. Bestimmen Sie den Fehler an der Stelle $x = 0,34$!

    Lösung:
    $p(x) = 0,7408(H_0^3(t) - 0,1H_1^3(t)) + 0.6703(0,1H_2^3(t) - H_3^3(t)),$.

    Der Fehler an der Stelle 0, 34 ist $1,694\,92 \cdot 10^{-7}$.

26. Implementieren Sie den Neville-Algorithmus und stellen Sie die Fehlerfunktion $r(x) = f(x) - P_{10}(x)$ für $f(x) = e^{-3x}$ im Intervall $[0; 5]$ grafisch dar! Das Polynom P_{10} soll durch die 11 Stützstellen $x_k = 0,5 \cdot k, 0 \leq k \leq 10$ bestimmt werden.

    Lösung:
    Es ist kein Programmierfehler, wenn Sie wie in Abbildung 13.4 die großen Abweichungen am Rand erhalten, Diese Abweichungen ergeben sich durch den Runge-Effekt!

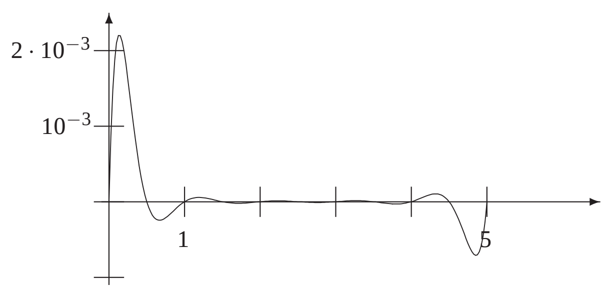


Abbildung 13.4: Die Fehlerfunktion $r(x) = e^{-3x} - P_{10}(x)$ für Aufgabe 26

Der Neville-Algorithmus als Java-Funktion:

```
private static double eval(double z) {
    int i, k;
    doubleArray1D t = new doubleArray1D(N);

    for (i=0; i<N; i++) {
     t.set(i, y.get(i));
     for (k=i-1; k>=0; k--)
         t.set(k, t.get(k+1)+
                 (t.get(k+1)-t.get(k))*(z-x.get(i))/(x.get(i)-x.get(k)));
    }

    return t.get(0);
}

private static doubleArray1D x;
private static doubleArray1D y;
private static int N;
```