Kapitel 12

Folgen und Reihen

Verständnisfragen

Sachfragen

1. Nennen Sie Beispiele für reelle Zahlenfolgen!
2. Was ist eine arithmetische Folge?
3. Was ist eine geometrische Folge?
4. Erläutern Sie den Begriff der monotonen Folge!
5. Erläutern Sie den Begriff der beschränkten Folge!
6. Was ist das Infimum und Supremum einer beschränkten Folge?
7. Erläutern Sie den Begriff der ε-Umgebung!
8. Wie ist die Konvergenz einer Folge definiert?
9. Ist der Grenzwert einer Folge eindeutig?
10. Was ist eine Cauchy-Folge?
11. Wie hängen Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz von Folgen zusammen?
12. Wie lauten die Limes-Sätze für Folgen?
13. Was ist eine Reihe?
14. Wann ist eine Reihe konvergent?
15. Was ist eine geometrische Reihe? Wann konvergiert sie?
16. Wie lautet das Cauchy'sche Hauptkriterium für Reihen?
17. Kennen Sie ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Reihe?
18. Was ist die harmonische Reihe? Ist sie konvergent?
19. Was ist eine alternierende Reihe?
20. Wie lautet das Leibniz-Kriterium?

21. Wie lautet das Majoranten-Kriterium?
22. Wie lautet das Quotienten-Kriterium?
23. Wie lautet das Wurzel-Kriterium?
24. Erläutern Sie den Begriff der absoluten Konvergenz!
25. Gilt für konvergente Reihen das Assoziativgesetz? Mit anderen Worten, wann dürfen Sie in einer Reihe Summanden vertauschen, ohne das Konvergenzverhalten zu verändern?
26. Was ist eine Potenzreihe?
27. Wie ist das Konvergenzintervall und der Konvergenzradius einer Potenzreihe definiert?
28. Wie kann der Konvergenzradius einer Potenzreihe bestimmt werden?
29. Wie sind die Landau'schen Symbole definiert?
30. Nennen Sie wichtige Vergleichsfolgen und ihre verbale Beschreibungen!
31. Was ist eine Norm?
32. Was ist eine p-Norm? Wie ist die Maximumsnorm definiert?
33. Wie kann das Gesamtschrittverfahren motiviert werden?
34. Wie kann das Einzelschrittverfahren motiviert werden?
35. Kennen Sie ein Konvergenzkriterium für Gesamt- und Einzelschrittverfahren?

Methodenfragen

1. Erkennen können, ob eine gegebene Folge eine arithmetische oder geometrische Folge ist.
2. Rekursiv gegebene Folgen bilden können.
3. Eine Folge auf Monotonie überprüfen können.
4. Eine Folge auf Schranken, Infimum und Supremum überprüfen können.
5. Eine Folge auf dem Zahlenstrahl und in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen können.
6. Eine gegebene Folge auf Konvergenz untersuchen können.
7. Für ein gegebenes ε bei einer konvergenten Folge das $N(\varepsilon)$ bestimmen können.
8. Die Limes-Sätze für Folgen anwenden können.
9. Die Teilsummen von Reihen bilden können.
10. Kriterien für die Konvergenz und Divergenz von Reihen anwenden können.
11. Den Konvergenzradius einer Potenzreihe bestimmen können.
12. Die Landau'schen Symbole anwenden können.
13. Vektornormen berechnen können.
14. Die Konvergenz einer Folge von Vektoren überprüfen können.
15. Das Gesamtschrittverfahren durchführen und programmieren können.
16. Das Einzelschrittverfahren durchführen und programmieren können.

Übungsaufgaben

1. Untersuchen Sie die Folgen $a_n = \frac{n}{n+1}$, $b_n = 3 - 2n$ und $c_n = n + \ln(n)$ auf Monotonie und Beschränktheit!

   Lösung:
   (a_n) ist streng monoton steigend und beschränkt mit Schranken 0 und 1, (b_n) ist streng monoton fallend und nach oben beschränkt mit Schranke 1; nach unten unbeschränkt. (c_n) ist streng monoton steigend und nach unten beschränkt mit Schranke 1.

2. Untersuchen sie die Folge $a_n = \sqrt{25n^2 + 7n + 1} - 5n$ und weisen Sie nach, dass sie streng monoton fallend und durch $C = 0,7$ nach unten beschränkt ist.

   Lösung:
   Dass $0,7$ eine untere Schranke der Folge (a_n) ist folgt aus

$$\begin{aligned} a_n > 0.7 &\Leftrightarrow \sqrt{25n^2 + 7n + 1} > 5n + \frac{7}{10} \\ &\Leftrightarrow 25n^2 + 7n + 1 > 25n^2 + 7n + (\frac{7}{10})^2 \\ &\Leftrightarrow 1 > \frac{49}{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{25(n+1)^2 + 7(n+1) + 1} - (\sqrt{25n^+ 7n + 1} + 5) \\ &= \sqrt{25n^+ 7n + 26 + (50n + 7)} - \sqrt{25n^2 + 7n + 26 + 10\sqrt{25n^2 + 7n + 1}}. \end{aligned}$$

   Es ist $10\sqrt{25n^2 + 7n + 1} > 50n + 7$, damit folgt $a_{n+1} - a_n < 0$.

3. Suchen Sie den kleinsten Index n mit $a_n < 0,01$ für die Folge $a_n = \frac{2n}{n^2+2}$.

   Lösung:
   Die Ungleichung

$$\frac{2n}{n^2 + 2} < \frac{1}{100}$$

   ist erfüllt für $n > 200$.

4. Bestimmen Sie Infimum und Supremum für die Folgen $a_n = \frac{2n}{n+1}$, $b_n = \frac{1}{n^2+1}$ und $c_n = (-1)^n \frac{n+2}{3^n}$!

   Lösung:
   Die Folge (a_n) hat das Infimum 1 und Supremum 2, (b_n) 0 als Infimum und $\frac{1}{2}$ als Supremum und (c_n) besitzt das Infimum -1 und Supremum $\frac{4}{9}$.

5. Zeigen Sie, dass die Folgen $a_n = \frac{1}{2^n}$ und $b_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n^2}$ konvergent sind mit Grenzwerten $a = 0$ und $b = 1$!

   Lösung:
   Für beliebiges $\varepsilon > 0$ und $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ ist $|\frac{1}{2^n}| < \varepsilon$.

   Für $n > \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon}$ ist $|b_n - b| < \varepsilon$.

6. Angenommen, a und b sind positive reelle Zahlen mit $a > b$. Mit a_1 und b_1 soll ihr arithmetisches bzw. geometrisches Mittel bezeichnet werden: $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = \sqrt{a \cdot b}$. Allgemein werden die Folgen
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$$
gebildet. Beweisen Sie durch vollständige Induktion $a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$. Zeigen Sie, dass die beiden Folgen konvergieren und dass die beiden Grenzwerte übereinstimmen!

Lösung:
Das arithmetische Mittel ist immer größer als das geometrische Mittel, es ist
$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}, a > b > 0.$$
Dies beweist man mit Hilfe der binomischen Formel:
$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} > ab \Leftrightarrow \frac{a^2 - 2ab - b^2}{4} > 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{4} > 0.$$
Dann ist aber auch $a_n > b_n$ für die beiden Folgen. Es ist $b_{n+1} > b_n$ wegen
$$\sqrt{a_n b_n} > b_n \Leftrightarrow a_n > b_n$$
und auch $a_{n+1} < a_n$ wegen
$$\frac{a_n + b_n}{2} < a_n \Leftrightarrow \frac{b_n}{2} < \frac{a_n}{2} \Leftrightarrow b_n < a_n.$$
Die Folge (a_n) ist also monoton fallend und durch b_1 beschränkt; damit ist sie auch konvergent. Genauso folgt die Konvergenz der monoton wachsenden Folge (b_n), die durch a_1 beschränkt ist.

Für die Folge $d_n = (a_n - b_n)^2$ gilt
$$\begin{aligned}(a_n - b_n)^2 &= (a_n + b_n)^2 - 4a_n b_n\\ &= 4a_{n+1}^2 - 4b_{n+1}^2\\ &= 4(a_{n+1} - b_{n+1})(a_{n+1} + b_{n+1})\end{aligned}$$
Dann gilt
$$d_{n+1} < \frac{1}{8b_1} d_n.$$
Die Folge (d_n) ist eine Nullfolge; die Konvergenz ist quadratisch!

Nach Gauß wird der gemeinsame Grenzwert der beiden Folgen *arithmetisch-geometrisches Mittel von a und b* $AGM(a,b)$ genannt.

7. Zeigen Sie, dass die nachstehenden Folgen den angegebenen Grenzwert g besitzen. Berechnen Sie die Anzahl der Folgeglieder, die außerhalb der ε-Umgebung um den Grenzwert liegen: $a_n = \frac{3n+2}{2n-1}$, $g = \frac{3}{2}$, $\varepsilon = 0,1$; $b_n = \frac{3-4n+n^2}{2+3n-n^2}$, $g = -1$, $\varepsilon = 0,005$.

Lösung:
Klammern Sie die höchste Potenz aus und verwenden Sie die Limessätze!

Bei der Folge (a_n) liegen die ersten 17 Folgeglieder außerhalb der ε-Umgebung mit $\varepsilon = 0,1$, bei (b_n) sind dies die ersten 197 Folgeglieder für $\varepsilon = 0,005$.

8. Erstellen Sie eine grafische Darstellung der Folgen $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$, $a_n = \frac{n^3}{n!}$ und $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$. Schätzen Sie gegebenenfalls den Grenzwert und weisen Sie die Konvergenz nach!

   Lösung:
   Die Folge $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$ ist in Abbildung 12.1 dargestellt. Es ist klar zu erkennen, dass es keinen eindeutigen Grenzwert gibt. Die Folge (a_{2n}) konvergiert gegen 1, die Folge mit ungeraden Indizes gegen -1.

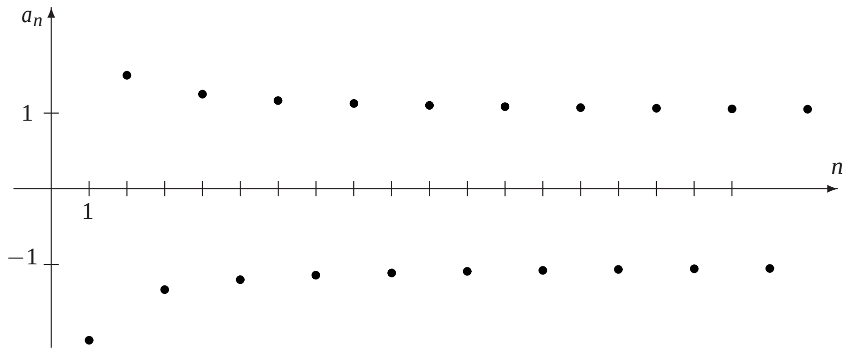

Abbildung 12.1: $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$ für $n \leq 20$

   Einige Folgeglieder der Folge $a_n = \frac{n^3}{n!}$ finden Sie in Abbildung 12.2. Die ersten Glieder scheinen zu wachsen, dann werden die Glieder sehr schnell sehr klein. Die Konvergenz der Folge gegen Null sieht man durch

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{1}{(n-3)!} \cdot \frac{n}{n^2 - 3n + 1},$$

   das Produkt zweier Nullfolgen ist eine Nullfolge.

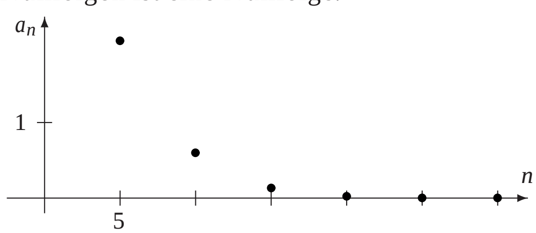

Abbildung 12.2: $a_n = \frac{n^3}{n!}$ für $n = 5, \ldots, 10$

   Die Folge $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$ finden Sie in Abbildung 12.3. Sie konvergiert, wenn man der Abbildung Glauben schenken darf nach gegen 5.

   Nach unten ist die Folge durch die konstante Folge 5, nach oben wegen $\sqrt[n]{3^n + 5^n} < \sqrt[n]{25}$ durch die Folge $b_n = \sqrt[n]{25}$ beschränkt; für $q > 1$ ist $\sqrt[n]{q}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert 1. Mit dem Sandwichsatz folgt dann auch die vermutete Konvergenz von (a_n) gegen den Grenzwert 5.

9. Die Folge $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ konvergiert gegen die Euler'sche Zahl e.

   (a) Zeigen Sie, dass für $0 \leq a < b$ die Ungleichungen $\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n+1)b^n$ und $b^n[(n+1)a - nb] < a^{n+1}$ erfüllt sind!

   (b) Verwenden Sie $a = 1 + \frac{1}{n+1}$ und $b = 1 + \frac{1}{n}$, um die Monotonie der Folge (a_n) zu untersuchen!

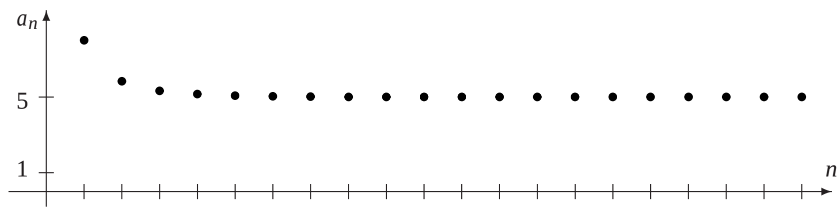

Abbildung 12.3: $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

(c) Verwenden Sie $a = 1$ und $b = 1 + \frac{1}{2n}$, um nachzuweisen, dass $a_{2n} < 4$ und $a_n < 4$ erfüllt sind!

(d) Weisen Sie nach, dass (a_n) konvergiert!

Lösung:
Teilaufgabe (a):

Die erste Ungleichung kann mit vollständiger Induktion bewiesen werden. Die Induktionsbasis $n = 1$:

$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = b + a < 2b,$$

für $0 \le a < b$.

Der Induktionschritt folgt mit:

$$\begin{aligned}(b^{n+1} - a^{n+1}) &= (b^n - a^n)(b+a) - ab^n + a^n b \\ &< 2b(b^n - a^n) + b^2(a^{n-1} - b^{n-1}).\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} &= 2b\frac{b^n - a^n}{b-a} + b^2\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{b-a} \\ &< 2bnb^{n-1} - b^2(n-1)b^{n-2} \\ &= (n+1)b^n.\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}-a^{n+1} &< b^n(n+1)(b-a) - b^{n+1} \\ &= b^n((n+1)b - (n+a)a + b) \\ &= b^n(nb - (n+1)a).\end{aligned}$$

Damit ist auch die zweite Ungleichung bewiesen.

Teilaufgabe (b): Für $a = 1 + 1\frac{1}{n+1}$ und $b = 1 + \frac{1}{n}$ ist $0 \le a < b$ erfüllt; einsetzen in die zweite Ungleichung in Teilaufgabe a) erhält man durch Einsetzen

$$(1 + \frac{1}{n})^n[(n+1)(1 + \frac{1}{n+1}) - n(1 + \frac{1}{n})] = (1 + \frac{1}{n})^n$$

und damit $a_n < a_{n+1}$.

Teilaufgabe (c): Setzt man diesmal die angegebenen Werte für a und b in die 2. Ungleichung ein, dann erhält man

$$(1 + \frac{1}{2n})^n < 2 \Leftrightarrow a_{2n} < 4.$$

Dann gilt wegen der Monotonie auch $a_{2n} < a_{2n+1} < a_{2n+2} < 4$, also ist 4 eine obere Schranke für die Folge (a_n).

Teilaufgabe (d): Eine monotone und beschränkte Folge ist konvergent!

10. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$!

    Lösung:
    Die Fibonacci-Folge kann mit Hilfe des goldenen Schnitts

$$\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

    durch

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\theta^n - (1-\theta)^n)$$

    dargestellt werden.

    Dann gilt für den Quotienten

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\theta 1n + 1 - (1-\theta)^{n+1}}{\theta^n - (1-\theta)^n},$$

    mit den Limessätzen folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \theta,$$

    denn $(1-\theta)^n$ ist eine Nullfolge!

11. Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!}$, $\sum_{i=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 5^{2n-1}}$ auf Konvergenz!

    Lösung:
    Die ersten drei Reihen konvergieren auf Grund des Quotientenkriteriums, die Konvergenz der alternierenden Reihe folgt aus dem Leibniz-Kriterium.

12. Beweisen Sie das Wurzelkriterium!

    Lösung:
    Der Beweis verläuft analog zum Nachweis des Quotientenkriteriums.

    Erfüllt die Folge (a_n) das Wurzelkriterium, dann gibt es ein $0 < q < 1$ mit

$$\sqrt[n]{a_n} < q.$$

    Also ist

$$a_n < q^n,$$

    und damit erhält man eine konvergente geometrische Reihe als Majorante.

13. Programmieren Sie in der Programmiersprache Ihrer Wahl eine Funktion, die in einer Schleife die Teilsummen der harmonischen Reihe berechnet und in jedem Schleifendurchgang ausgibt. Wenn Sie die Schleife lang genug laufen lassen, scheint auf dem Computer die harmonische Reihe zu konvergieren. Beschreiben Sie die Gründe für diesen Irrtum!

    Lösung:
    Wie Sie wissen divergiert die harmonische Reihe, die Folge der Teilsummen wächst über jede Grenze. Egal welches Gleitpunkt-Zahlensystem Sie benutzen, jedes dieser Systeme hat eine größte darstellbare Zahl. Wird diese erreicht, erhalten Sie danach immer nur diese größte Zahl als Summenwert.

    Bei der Summierung werden auch die Genauigkeitsunterschiede zwischen `float` und `double` deutlich. Für die die Teilsumme $S_{1\,000}$ ergibt sich die folgende Ausgabe:

```
Die Summe für float-Genauigkeit bis 1/100000 :12.090851

Die Summe für float-Genauigkeit bis 1/100000 :12.090146129863335
```

```
Die Summe für float-Genauigkeit bis 1/5000000 :15.403683

Die Summe für float-Genauigkeit bis 1/5000000 :16.002164235298594
```

Bei `float`-Genauigkeit erhält man jetzt schon keinen neuen Wert.

```
Die Summe für float-Genauigkeit bis 1/10000000 :15.403683

Die Summe für float-Genauigkeit bis 1/10000000 :16.695311365857272
```

Bei `double` geht es noch weiter:

```
Die Summe für float-Genauigkeit bis 1/100000000 :15.403683

Die Summe für float-Genauigkeit bis 1/100000000 :18.997896413852555
```

```
Die Summe für float-Genauigkeit bis 1/2000000000 :15.403683

Die Summe für float-Genauigkeit bis 1/2000000000 :21.993628682662845
```

Wann ist eigentlich bei `double` Schluß?

14. Weisen Sie nach, dass $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2+x^2}$ für $x \in (0;\infty)$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(ix)}{i^{\frac{3}{2}}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren!

    Lösung:
    Es gibt die konvergenten Majoranten $\sum \frac{1}{i^2}$ und $\sum \frac{1}{i^{3/2}}$.

15. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen $\sum_{i=1}^{\infty} ix^i$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i^i}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \sin(i\pi)x^i$, $\sum_{i=1}^{\infty} \ln(i)x^i$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i^{\ln(i)}}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln(i)}{i}x^i$.

    Lösung:
    $\sum_{i=1}^{\infty} ix^i$: $R = 1$, am Rand divergent;
    $\sum_{i=1}^{\infty} \sin(i\pi)x^i$: $R = \infty$;
    $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i^i}$: $R = \infty$;
    $\sum_{i=1}^{\infty} \ln(i)x^i$: $R = 1$, am Rand divergent;
    $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i^{\ln(i)}}$: $R = 1$, am Rand konvergent;
    $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln(i)}{i}x^i$: $R = 1$, für $x = 1$ divergent, für $x = -1$ konvergent.

16. Die Besselfunktion der Ordnung 1 ist durch die Potenzreihe $J_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$ gegeben. Bestimmen Sie das Konvergenzintervall und vergleichen Sie die ersten 5 Teilsummen von J_1!

    Lösung:
    Auch die Besselfunktion 1. Ordnung konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, das folgt aus dem Quotienten- oder dem Wurzelkriterium wie im Fall der Besselfunktion 0. Ordnung auf Seite 310. Die Funktion J_1 ist im Gegensatz zur Besselfunktion 0.-Ordnung nicht symmetrisch zur y-Achse, sondern ähnlich wie die Sinus-Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung - eine ungerade Funktion. In Abbildung **??** finden Sie eine grafische Darstellung von J_1; Abbildung **??** zeigt die Teilsummen S_3, S_5, S_7 und S_9.

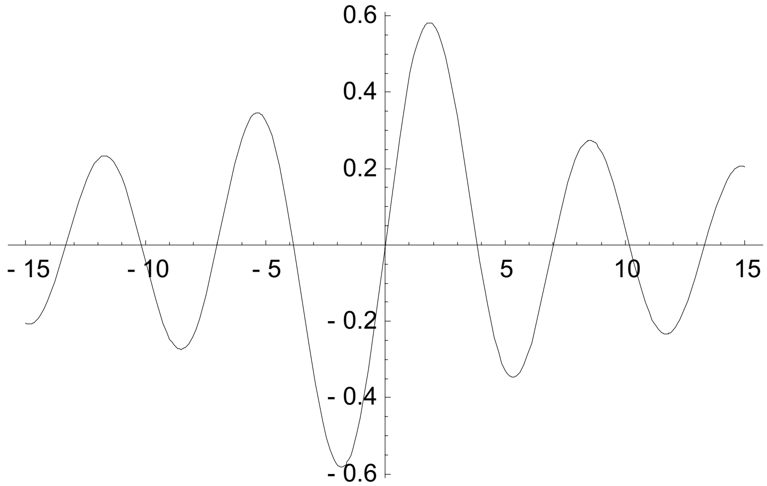

Abbildung 12.4: Der Verlauf der Bessel-Funktion $J_1(x)$

Die ersten 5 Teilsummen für $J_1(x)$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= \frac{x}{2},\\
S_3(x) &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16},\\
S_5(x) &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384},\\
S_7(x) &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \frac{x^7}{18\,432},\\
S_9(x) &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \frac{x^7}{18\,432} + \frac{x^9}{1\,474\,560}.
\end{aligned}$$

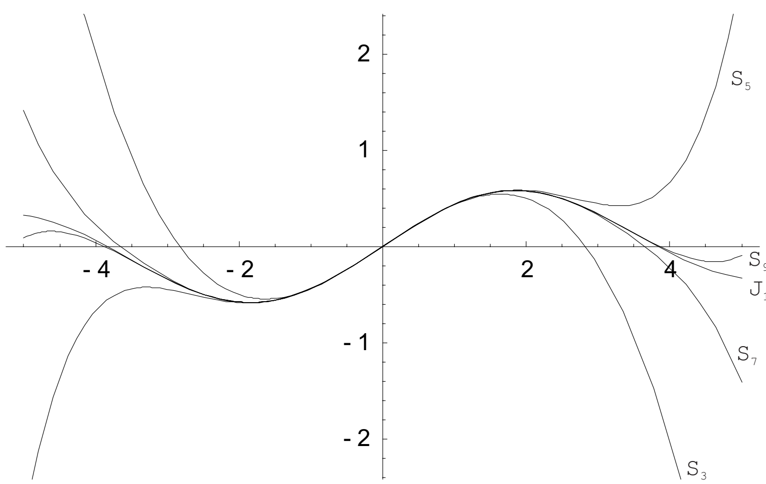

Abbildung 12.5: Die Teilsummen S_3, S_5, S_7, S_9 der Besselfunktion $J_1(x)$

17. Benutzen Sie Ihre Implementierung des Euklidischen Algorithmus und zählen Sie für konkrete Eingaben von a und b mit $b < a$ die Anzahl der benötigten Schritte. Vergleichen Sie diese mit der theoretischen Obergrenze!

Lösung:
Die Werte in der folgenden Tabelle wurden mit `g++` und `unsigned long` als Ganzzahltyp berechnet.

a	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
$\left[\frac{\log(\sqrt{5}a+\frac{1}{2})}{\log\theta}\right]$	10	15	19	24	29	34	38	43
Max. Anzahl Schritte für ggT$(a,b), b < a$	7	11	15	19	24	28	32	37

18. Beweisen Sie $O(A)+O(A) = O(A), o(A)+o(A) = o(A)$ und $O(A)O(B) = O(AB), o(A)o(B) = o(AB)$ für zwei reelle Zahlenfolgen A und B.

Lösung:
Die Beweise werden für das o durchgeführt; für O verlaufen Sie analog.

Ist $A = (a_n)$ eine Folge und $(b_n) = o(A), (c_n) = o(A)$, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0, \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = 0.$$

Das gleiche gilt sicher auch für die Folgen

$$\frac{b_n + c_n}{a_n}$$

und

$$\frac{b_n \cdot c_n}{a_n}$$

.

19. Beschreiben Sie Folgen mit $(a_n) = O(1)$ und $(a_n) = o(1)$!

Lösung:
Für eine Folge mit $(a_n) = O(1)$ ist der Quotient

$$\frac{a_n}{1} = a_n$$

beschränkt; also auch die Folge (a_n) selbst.

Für $(a_n) = o(1)$ ist mit dem gleichen Argument die Folge eine Nullfolge.

20. Weisen Sie die folgende Ungleichung nach: $\frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty$.

Lösung:
Die Ungleichung $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2$ ist klar, Sie müssen einfach die Definition der beiden Normen aufschreiben.

Es ist

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}\|_\infty^2 = n\|\mathbf{x}\|_\infty^2$$

und damit sind auch die anderen Ungleichungen bewiesen.

21. Implementieren Sie das Gesamt- und Einzelschrittverfahren und lösen Sie damit selbst gewählte Beispiele!

Lösung:
Die Implementierung der beiden Verfahren, wieder mit Hilfe der `NINJA`-Klassen und `BLAS` in Java:

```
  private static void gesamtSchritt(doubleArray2D A, doubleArray1D b,
                                    doubleArray1D x, double epsilon)
  {
    int i, j, counter, n = x.size();
    double summe, fehler;
    doubleArray1D xneu = new doubleArray1D(n);

    fehler = 1.0E10;
    counter = 0;

    while (fehler > epsilon) {
      for (i=0; i<n; i++) {
        summe = 0.0;
        for (j=0; j<i; j++)
            summe += A.get(i,j)*x.get(j);
        for (j=i+1; j<n; j++)
            summe += A.get(i,j)*x.get(j);
        xneu.set(i, (b.get(i)-summe)/A.get(i,i));
      }

      fehler = Blas.dnrm2(x.minus(xneu));
      x.assign(xneu);
      counter++;
   }
   System.out.println("Das Konvergenzkriterium beim Gesamtschrittverfahren"
                      + " war nach "+counter+" Iterationen" +
                      " erfüllt!");
  }

  private static void einzelSchritt(doubleArray2D A, doubleArray1D b,
          doubleArray1D x, double epsilon)
  {
   int i, j, counter, n = x.size();
   double summe, fehler;
   doubleArray1D xalt = new doubleArray1D(n);

   fehler = 1.0E10;
   counter = 0;

   while (fehler > epsilon) {
     xalt.assign(x);
     for (i=0; i<n; i++) {
        summe = 0.0;
        for (j=0; j<i; j++)
          summe += A.get(i,j)*x.get(j);
        for (j=i+1; j<n; j++)
          summe += A.get(i,j)*x.get(j);
        x.set(i, (b.get(i)-summe)/A.get(i,i));
     }

     fehler = Blas.dnrm2(x.minus(xalt));
     counter++;
  }
  System.out.println("Das Konvergenzkriterium beim Einzelschrittverfahren" +
                     " war nach "+counter+" Iterationen" +
                     " erfüllt!");
}
```

```
private static void initArrays(doubleArray2D A, doubleArray1D b,
                               doubleArray1D x) {

  // Besetzen des Gleichungssystems und des Startvektors für die
  // iterative Lösung.
  b.set(0, 7.0); b.set(1, 7.0); b.set(2, 3.0);

  A.set(0,0, 4.0); A.set(0, 1, 1.0); A.set(0, 2, 2.0);
  A.set(1,0, 2.0); A.set(1, 1, 4.0);  A.set(1, 2, 1.0);
  A.set(2,0, 0.0); A.set(2, 1, 1.0);  A.set(2, 2, 2.0);

  x.set(0, 1.0); x.set(1, 2.0); x.set(2,3.0);
}
```

Wenn man beispielsweise das Gleichungssystem von Seite 318 verwendet, dann benötigt das Gesamtschrittverfahren für eine Abbruchgenauigkeit von $\epsilon = 10^{-7}$ 91 Iterationen, das Einzelschrittverfahren nur 19.

Sehr häufig werden iterative Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssytemen verwendet, um diskretisierte partielle Differenzialgleichung, beispielweise die Wärmeleitungsgleichung zu lösen. Dabei entstehen durch das Ersetzen der Ableitungen durch Differenzialquotienten sehr dünn besetzte Bandmatrizen, beispielsweise eine Matrix wie

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & -1 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nur die Diagonale und die beiden Nebendiagonalen sind ungleich Null. Je nach Diskretisierungsmethode werden die Matrizen etwas komplexer; aber die dünne Struktur (im angelsächsischen Sprachraum wird von *sparse matrices* gesprochen) bleibt auf jeden Fall bestehen.

Dann kann natürlich darauf verzichtet werden, das Produkt zwischen Matrix A und dem Iterationsvektor bei den beiden Gesamt- und Einzelschrittverfahren zu berechnen; man würde nur unnötig oft mit 0 multiplizieren. Für ein Element des Iterationsvektors beim Gesamtschrittverfahren ergibt sich dann folgende Berechnung (dabei wurden die Vektorelemente mit $0, \dots, n-1$ nummeriert, wie in den Programmiersprachen):

$$\begin{aligned} x_0^{(k+1)} &= 0,25(b_0 + x_1^{(k)}), \\ x_i^{(k+1)} &= 0,25(b_i + x_{i-1}^{(k)} + x_{i+1}^{(k)}), \\ x_{n-1}^{(k+1)} &= 0,25(b_{n-1} + x_{n-2}^{(k)}). \end{aligned}$$

Die Berechnungsvorschrift für das Einzelschrittverfahren können Sie sicher leicht davon ableiten. Im folgenden Quelltext sind noch zusätzlich alle Komponenten der rechten Seite $\mathbf{b}$ gleich $1,0$; dann kann auf das Feld dafür gänzlich verzichtet werden.

```
private static void gesamtSchrittSparse(doubleArray1D x, double epsilon) {
  // Gesamtschrittverfahren für eine dünn besetzte Matrix
  int i,j,counter, n=x.size();
  double fehler;
  doubleArray1D xneu = new doubleArray1D(n);

  fehler = 1.0E10;
  counter = 0;
```

```
    while (fehler > epsilon) {
        xneu.set(0, 0.25*(1.0+x.get(1)));
        for (i=1; i<n-1; i++)
           xneu.set(i, 0.25*(1.0+x.get(i-1)+x.get(i+1)));
        xneu.set(n-1, 0.25*(1.0+x.get(n-2)));
          fehler = Blas.dnrm2(x.minus(xneu));
          x.assign(xneu);
          counter++;
       }
    System.out.println("Das Konvergenzkriterium beim Gesamtschrittverfahren"
                          +" war nach "+counter+" Iterationen" +
                          " erfüllt!");
  }

  private static void einzelSchrittSparse(doubleArray1D x, double epsilon) {
    // Gesamtschrittverfahren für eine dünn besetzte Matrix
    int i,j,counter, n=x.size();
    double fehler;
    doubleArray1D xalt = new doubleArray1D(n);

    fehler = 1.0E10;
    counter = 0;

    while (fehler > epsilon) {
        xalt.assign(x);
        x.set(0, 0.25*(1.0+x.get(1)));
        for (i=1; i<n-1; i++)
           x.set(i, 0.25*(1.0+x.get(i-1)+x.get(i+1)));
        x.set(n-1, 0.25*(1.0+x.get(n-2)));
        fehler = Blas.dnrm2(x.minus(xalt));
        counter++;
    }
    System.out.println("Das Konvergenzkriterium beim Einzelschrittverfahren"
                          + " war nach "+counter+" Iterationen" +
                          " erfüllt!");
  }
```

Bei einer Abbruchgenauigkeit von $\varepsilon = 10^{-7}$ benötigt dieses Gesamtschrittverfahren 50 Iterationen. Für die gleiche Genauigkeitsanforderung benötigte das Einzelschrittverfahren genau 50%, nämlich 25 Iterationen.