Kapitel 7

Graphentheorie

Verständnisfragen

Sachfragen

1. Was ist ein ungerichteter Graph?
2. Erläutern Sie den Begriff *Adjazenz*!
3. Erläutern Sie den Eckengrad in einem Graphen!
4. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen den Eckengraden und der Anzahl der Kanten eines ungerichteten Graphen?
5. Wievele Ecken ungeraden Grades hat ein ungerichteter Graph?
6. Was ist ein Weg in einem Graphen?
7. was ist ein Kreis in einem Graphen?
8. Wie ist die Länge eines Wegs und eines Kreises in einem Graphen definiert?
9. Was versteht man unter einem zusammenhängenden Graphen?
10. Was ist eine Brücke in einem zusammenhängenden Graphen?
11. Was ist der Abstand zweier Ecken in einem Graphen?
12. Erläutern Sie den Begriff des Eulergraphen und das Königsberger Brückenproblem!
13. Was ist ein Hamiltonkreis und ein Hamiltongraph?
14. Was ist ein gerichteter Graph?
15. Was ist eine Adjazenzmatrix?
16. Was ist eine Inzidenzmatrix?
17. Wie kann ein gerichteter Graph dargestellt werden?
18. Was ist ein Baum? Was ist ein Wald?
19. Was ist ein binärer Baum?

20. Was ist das Niveau eines binären Baums? Kennen Sie eine Abschätzung für das Niveau eines Baums?
21. Welche Aussagen kennen Sie über die Anzahl der Ecken eines regulären binären Baums?
22. Was ist ein aufspannender Baum?
23. Welchen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Ecken und der Kanten gibt es in einem Baum?
24. Wieviele Blätter enthält ein regulärer binärer Baum?
25. Was ist ein aufspannender Baum?
26. Wie hängen aufspannende Bäume und kürzeste Wege in einem Graphen zusammen?
27. Beschreiben Sie die Breitensuche!
28. Beschreiben Sie die Tiefensuche!
29. Was ist ein bewerteter Graph?
30. Was ist ein minimal aufspannender Baum?
31. Beschreiben Sie den Kruskal-Algorithmus!
32. Beschreiben Sie den Dijkstra-Algorithmus!
33. Beschreiben Sie das Problem des Handlungsreisenden!
34. Wie kann das Problem des Handlungsreisenden gelöst werden?
35. Was ist ein planarer Graph?
36. Wie lautet die Eulerformel?
37. Kennen Sie ein notwendiges Kriterium für die Planarität eines gegebenen Graphen?
38. Was ist eine Färbung eines Graphen?
39. Was ist die chromatische Zahl $\chi(G)$ eines Graphen G?
40. Wie lautet der Vierfarbensatz?
41. Was ist ein bipartiter Graph?
42. Wie kann ein bipartiter Graph charakterisiert werden?
43. Was ist ein Matching?
44. Was ist ein gesättigtes Matching? Was ist ein maximales Matching?
45. Was ist ein alternierender Weg in einem bipartiten Graphen?
46. Was ist ein vergrößernder Weg in einem bipartiten Graphen?
47. Wie kann ein Matching in einem bipartiten Graphen vergrößert werden?
48. Wie lautet der Heiratssatz?
49. Was ist eine minimale Eckenüberdeckung?
50. Wie lautet der Dualitätssatz von König?
51. Wie verläuft der Ungarische Algorithmus?

Methodenfragen

1. Eckengrade in einem Graphen bestimmen können.
2. Einfache Graphen auf der Basis einer gegebenen Ecken- und Kantenmenge grafisch darstellen können.
3. Wege und Kreise in einem Graphen erkennen und darstellen können.
4. Den Abstand zwischen zwei Ecken in einem Graphen bestimmen können.
5. Entscheiden können, ob ein gegebener Graph ein Eulergraph ist.
6. Einen Eulerkreis konstruieren können, wenn der Graph ein Eulergraph ist.
7. Die Adjazenz- oder Inzidenzmatrix eines gegebenen Graphen aufstellen können.
8. Für eine gegebene Adjazenz- oder Inzidenzmatrix den Graphen beschreiben und grafisch darstellen können.
9. Die Adjazenzliste eines gegebenen Graphen aufstellen können.
10. Für eine gegebene Adjazenzliste einen Graphen beschreiben und grafisch darstellen können.
11. Datenstrukturen für die Darstellung eines Graphen implementieren und anwenden können.
12. Entscheiden können, ob ein gegebener Graph ein Baum ist.
13. Die Eigenschaften eines Baums bestimmen können.
14. Für einen gegebenen Graphen einen aufspannenden Baum konstruieren können!
15. Die Breitensuche durchführen und implementieren können.
16. Die Tiefensuche durchführen und implementieren können.
17. Den Kruskal-Algorithmus durchführen und implementieren können.
18. Den Dijkstra-Algorithmus durchführen und implementieren können.
19. Die MST-Heuristik für die Lösung des Problem des Handlungsreisenden durchführen können.
20. Die Eulerformel auf einen planaren Graphen anwenden können.
21. Überprüfen können, ob ein Graph notwendige Bedingungen für die Planarität erfüllt.
22. Einen Graphen färben können.
23. Überprüfen können, ob ein gegebener Graph bipartit ist.
24. Feststellen können, ob ein Matching gesättigt oder maximal ist.
25. Ein gesättigtes Matching bestimmen können.
26. Vergrößernde Wege finden und anwenden können.
27. Den Ungarischen Algorithmus durchführen können.

Übungsaufgaben

1. Zeichnen Sie die Graphen G_1 mit der Inzidenzmatrix B und G_2 mit der Adjazenzmatrix A:

$$B = \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0&1&0&1&1&0 \\ 1&0&1&0&0&1 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0 \\ 1&0&0&1&0&1 \\ 0&1&1&0&1&0 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Lesen Sie die Inzidenzmatrix spaltenweise, dann können Sie direkt den Graphen zeichnen. Der Graph für B hat 5 Ecken und 8 Kanten. Anschließend kann man versuchen, das Layout zu verbessern. Bei der Adjazenzmatrix reicht es, das obere Dreieck zu betrachten und die Kanten zu zeichnen. Auch hier bietet es sich an, das Layout anschließend zu verbessern.

Ein Werkzeug für das Layout von Graphen ist GraphViz von AT&T, das Sie unter der URL *hier noch die URL einfügen* finden. Der ungerichtete Graph zur Adjazenzmatrix kann dann als Eingabedatei wie folgt definiert werden:

```
graph G {
        1 -- 2;
        1 -- 4;
        1 -- 5;
        2 -- 3;
        2 -- 6;
        3 -- 4;
        3 -- 6;
        4 -- 5;
        5 -- 6;
```

Für den Graphen mit der Inzidenzmatrix B ist die Eingabedatei wie folgt gegeben:

```
graph G {
        1 -- 2;
        1 -- 4;
        1 -- 5;
        2 -- 3;
        2 -- 5;
        3 -- 4;
        3 -- 5;
        4 -- 5;
```

Die Ergebnisse finden Sie in Abbildung 7.1 und 7.2.

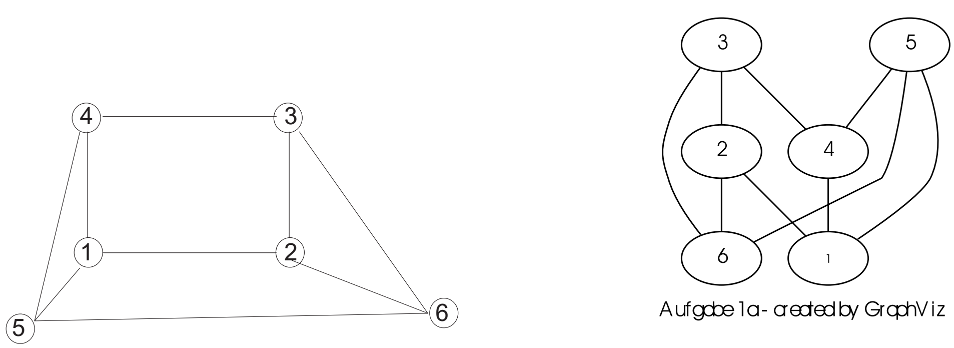


Abbildung 7.1: Layout des Graphen zur Adjazenzmatrix A in Aufgabe 1; links manuell; rechts berechnet mit GraphViz

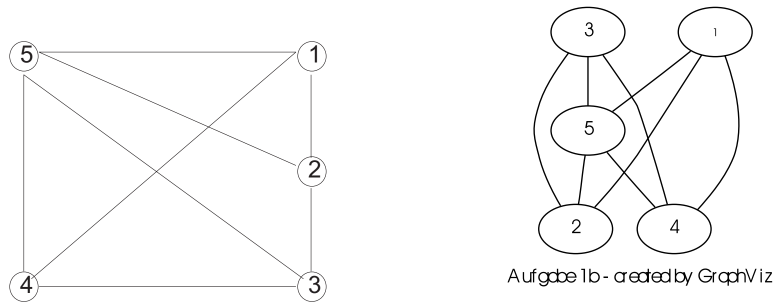


Abbildung 7.2: Layout des Graphen zur Inzidenzmatrix B in Aufgabe 1; links manuell; rechts mit GraphViz

2. Beweisen Sie, dass für einen Graphen $G(E,K)$ mit den Ecken $u_1,\dots,u_n$, Adjazenzmatrix A und Inzidenzmatrix B die Gleichung $BB^T = diag(d(u_1),\dots,d(u_n)) + A$ erfüllt ist.

   Lösung:
   Die Matrix BB^T ist eine $n\times n$ Matrix. Für die Elemente des Produkts ausserhalb der Diagonalen ist $b_{il}b_{lj} = 1$ genau dann, wenn es eine Kante zwischen den Ecken u_i und u_j gibt. In der Diagonalen gilt $\sum_{k=1,i\neq i}^{m} b_{ik}b_{ki} = d(u_i)$.

3. Beweisen Sie, dass eine Kante in einem Graphen genau dann eine Brücke ist, wenn sie in keinem Kreis des Graphen liegt.

   Lösung:
   Angenommen, k ist eine Brücke und liegt in einem Kreis. Dann kann nach dem Herausnehmen von k immer noch jeder Knoten im Kreis erreicht werden; ein Widerspruch, denn nach dem Herausnehmen einer Brücke zerfällt der Graph in mindestens zwei Zusammenhangskomponenten.

   Ist umgekehrt $k = u_iu_j$ eine Brücke, dann gibt es keinen weiteren Weg von u_i nach u_j, k kann nicht in einem Kreis liegen.

4. Beweisen Sie, dass für die Inzidenzmatrix B eines gerichteten Graphen $GR(E,K)$ die Zeilensummen gleich $d^+(u) - d^-(u)$ sind und die Spalten sich zu 0 summieren.

   Lösung:
   In jeder Spalte j gibt es zwei Einträge ungleich Null. Einer der Einträge entspricht einem Anfangs-, einer einem Endpunkt. Daraus folgt die Spaltensumme.

   $d^+(u)$ entspricht der Anzahl der 1-Einträge in jeder Zeile, $d^-(u)$ der $(-1($- Einträge.

5. Gibt es einen einfachen Graphen, der 15 Ecken vom Grad 5 hat?

   Lösung:
   Nein, denn die Summe der Eckengrade muss eine gerade Zahl sein!

6. Stellen Sie für die Graphen in Abbildung 7.3 die Adjazenz- und Inzidenzmatrix und die Adjazenzliste auf!

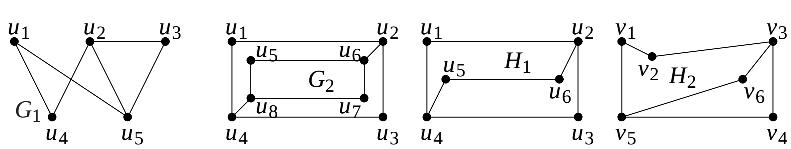


Abbildung 7.3: Die Graphen für die Aufgaben 6 und 7

Lösung:
Die Adjazenzmatrix von G_1 ist eine 5×5-Matrix:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Inzidenzmatrix müssen die Kanten nummeriert werden:

$$k_1 = u_1u_4, k_2 = u_1u_5,$$
$$k_3 = u_2u_3, k_4 = u_2u_5,$$
$$k_5 = u_2u_5, k_6 = u_3u_5.$$

Damit ergibt sich die 5×6-Inzidenzmatrix

$$IG_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

G_2 hat die 8×8-Adjazenzmatrix

$$G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Inzidenzmatrix müssen die Kanten nummeriert werden:

$$k_1 = u_1u_2, k_2 = u_2u_3,$$
$$k_3 = u_3u_4, k_4 = u_4u_1,$$
$$k_5 = u_2u_6, k_6 = u_4u_8,$$
$$k_7 = u_5u_6, k_8 = u_6u_7,$$
$$k_9 = u_7u_8, k_{10} = u_8u_5.$$

Damit ergibt sich die 8×10-Inzidenzmatrix

$$IG_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

H_1 hat die 6×6-Adjazenzmatrix

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Inzidenzmatrix müssen die Kanten nummeriert werden:

$$\begin{aligned} &k_1 = u_1u_2, k_2 = u_2u_3, \\ &k_3 = u_3u_4, k_4 = u_4u_1, \\ &k_5 = u_4u_5, k_6 = u_5u_6, \\ &k_7 = u_2u_6. \end{aligned}$$

Damit ergibt sicht die 6×7-Inzidenzmatrix

$$IH_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

H_2 hat die 6×6-Adjazenzmatrix

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Inzidenzmatrix müssen die Kanten nummeriert werden:

$$\begin{aligned} &k_1 = v_1v_2, k_2 = v_2v_3, \\ &k_3 = v_3v_4, k_4 = v_4v_5, \\ &k_5 = v_5v_1, k_6 = v_5v_6, \\ &k_7 = v_3v_6. \end{aligned}$$

Damit ergibt sicht die 6×7-Inzidenzmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Sind die Graphen H_1 und H_2 in Abbildung 7.3 isomorph?

   Lösung:
   Wenn die beiden Graphen isomorph sind, dann muss es eine adjazenzerhaltende Abbildung zwischen ihnen geben.

Es ist $d(u_1) = 2$ und diese Ecke in H_1 hat nur Nachbarn, die Grad 3 besitzen. Dann ist als Bild für u_1 nur v_4 oder v_6 möglich. Dann wird jetzt $\varphi(u_1) = v_6$ definiert; sollte dies nicht zu einem Isomorphismus führen, kann die Variante $\varphi(u_1) = v_4$ betrachtet werden.

u_2 ist adjazent zu u_1, also sind die einzig möglichen Bilder für u_2 nur die Ecken v_3 oder v_5. Wir setzen willkürlich $\varphi(u_2) = v_3$. Als Bild für u_3 wird $\varphi(u_3) = v_4$ gesetzt; auch $\varphi(u_3) = v_2$ wäre noch möglich gewesen.

Für die restlichen Ecken wird $\varphi(u_4) = v_5$ und $\varphi(u_5) = v_1, \varphi(u_6) = v_2$ gesetzt.

Stellt man die Adjazenzmatrizen beider Graphen auf, wobei die Ecken in H_2 durch die Bilder $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_6)$ nummeriert werden (das Element 12 ist also beispielsweise gegeben durch die Information, ob es zwischen $\varphi(u_1) = v_6$ und $\varphi(u_2) = v_3$ eine Kante gibt), dann erhält man

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sie stimmen offensichtlich überein; dann ist φ eine kantenerhaltende Abbildung; die beiden Graphen sind isomorph.

8. Stellen Sie fest, ob die Graphen in Abbildung 7.4 Eulergraphen sind, und geben Sie gegebenenfalls einen Eulerkreis an!

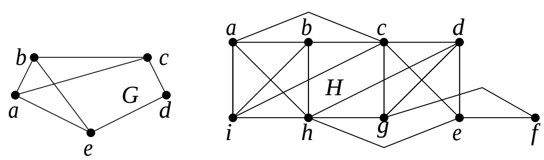


Abbildung 7.4: Graphen zu Aufgabe 8

Lösung:
Der Graph G hat nur eine Ecke mit geraden Grad, nämlich c.

Der Graph H hat nur Ecken mit geradem Grad, es ist $d(f) = 2$, alle anderen Ecken haben Grad 4.

Ein Eulerkreis ist $a, i, h, g, d, e, f, g, c, e, h, d, c, a, b, i, c, b, h, a$.

9. Wie viele Kanten hat ein Baum mit 10 000 Ecken? Wie viele Blätter hat ein regulärer binärer Baum mit 99 Ecken?

Lösung:
Ein Baum hat $|K| = |E| - 1$ Kanten; also gibt es im vorliegenden Fall 9 999 Kanten. Ein regulärer binärer Baum hat $\frac{n+1}{2}$ Blätter, im vorliegenden Fall also $\frac{101}{2} = 50$ Blätter.

10. Welche der folgenden Codes sind Präfix-Codes? a) a:11, e:00, t:10, s:01; b) a:0, e:1, t:01, s:001, c) a:101, e:11, t:001, s:011, n:010. Geben Sie, wenn möglich, den Klartext für die Codes 01111110 und 00110101101111 an!

Lösung:
Die Fälle a) und c) stellen Präfix-Codes dar; bei b) ist die Zuordnung nicht eindeutig; denn 01 kann sowohl t als auch ae bedeuten; 001 könnte sowohl für s als auch für aae oder für at stehen.

01111110 steht in Code a) für das Wort *saat*, in c) gibt es keinen Sinn.

00110101101111 steht in Code a) für *easstaa*, in Code c) für *tasse*.

11. Geben Sie die Codes für $\{a, e, i, k, o, p, u\}$ für den binären Baum in Abbildung 7.5 an!

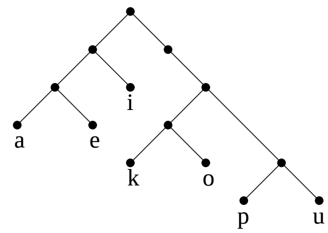


Abbildung 7.5: Der binäre Baum für Aufgabe 11

Lösung:
a: 000, e: 001, i: 01, k: 1100, o: 1101, p: 1110, u: 1111.

12. Bestimmen Sie einen Huffman-Code für die Zeichen $\{a, b, c, d, e, f\}$ mit den Häufigkeiten 12%, 32 %, 4 %, 20 %, 16 % und 16 %. Bestimmen Sie die mittlere Codewort-Länge!

Lösung:
Das Ergebnis ist a: 1110, b: 10, c: 1111, d: 00, e: 110, f: 01. Die mittlere Code-Länge ist $2,16$.

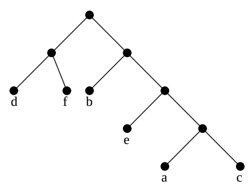


Abbildung 7.6: Der binäre Baum zur Lösung von Aufgabe 12

13. Konstruieren Sie einen minimalen aufspannenden Baum mit dem Kruskal- und dem Prim-Algorithmus für die bewerteten Graphen aus Abbildung 7.7.

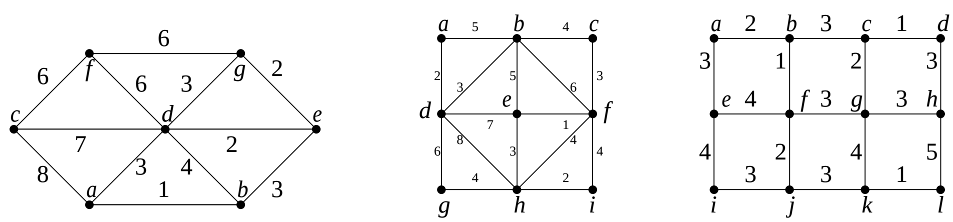


Abbildung 7.7: Die bewerteten Graphen zu Aufgabe 13

Lösung:
Die Lösungen finden Sie in den Tabellen 7.1, 7.2 und 7.3.

14. Ein *maximal aufspannender Baum* in einem zusammenhängenden und bewerteten Graphen ist ein Baum mit dem größtmöglichen Gewicht. Formulieren Sie einen Algorithmus, der einen solchen Baum konstruiert, und wenden Sie ihn auf den Graphen links in Abbildung 7.7 an!

Lösung:
Sie können den Kruskal- oder Prim-Algorithmus „umbauen“; statt des Minimums verwenden Sie immer das Maximum. Tabelle 7.4 zeigt das Ergebnis, wenn Sie die Kanten der Größe nach sortieren und immer eine Kante mit größtmöglichem Gewicht auswählen, solange kein Kreis geschlossen wird.

Kruskal-Algorithmus			Prim-Algorithmus		
n	Kante	Gewicht	n	Kante	Gewicht
1	ab	1	1	ab	1
2	ed	2	2	be	3
3	eg	2	3	ed	2
4	be	3	4	eg	2
5	fg	6	5	fg	6
6	fc	6	6	fc	6
		20			20

Tabelle 7.1: Kruskal- und Prim-Algorithmus für den Graph links in Abbildung 7.7

Kruskal-Algorithmus			Prim-Algorithmus		
n	Kante	Gewicht	n	Kante	Gewicht
1	ef	1	1	ef	1
2	ad	2	2	cf	3
3	hi	2	3	eh	3
4	bd	3	4	hi	2
5	cf	3	5	bc	4
6	eh	3	6	bd	3
7	bc	4	7	ad	2
8	gh	4	8	gh	4
		22			22

Tabelle 7.2: Kruskal- und Prim-Algorithmus für den Graph in Abbildung 7.7 Mitte

15. Bestimmen Sie die kürzesten Wege im Graphen in Abbildung 7.8 für die folgenden Eckenpaare: a) a, h, b) a, d, c) a, f, d) b, h!

    Lösung:

    a) Der Weg zwischen a und h ist gegeben durch ac, cd, de, eg, gh; er hat die gewichtete Länge 16.
    b) Der Weg zwischen a und d ist gegeben durch ac, cd; er hat die gewichtete Länge 6.
    c) Der Weg zwischen c und f ist gegeben durch cd, df; er hat die gewichtete Länge 8.
    d) Der Weg zwischen b und h ist gegeben durch bd, de, eg, gh; er hat die gewichtete Länge 15.

16. Führen Sie den Dijkstra-Algorithmus für den Graphen in **??** auf Seite **??** durch, ausgehend von Ecke c!

    Lösung:
    $\{ce, ef, cb, cd, ba\}$

17. Bestimmen Sie einen Hamiltonkreis mit Hilfe der MST Heuristik für den Graphen in Abbildung 7.9!

    Lösung:
    Aus dem Graphen kann ein vollständiger Graph gemacht werden, in dem Sie die fehlenden Kanten bilden und mit der Länge der entsprechenden Wege belegen. Im ersten Schritt wird ein minimal aufspannender Baum bestimmt, beispielsweise ausgehend von Ecke a. Das Ergebnis ist die Kantenmenge $\{ac, cd, de, db\}$.

Kruskal-Algorithmus		
n	Kante	Gewicht
1	cd	1
2	kl	1
3	bf	1
4	cg	2
5	ab	2
6	fj	2
7	bc	3
8	jk	3
9	gh	3
10	ij	3
11	ae	3
		24

Prim-Algorithmus		
n	Kante	Gewicht
1	bf	1
2	ab	2
3	fj	2
4	ae	3
5	ij	3
6	fg	3
7	eg	2
8	cd	1
9	gh	3
10	hl	3
11	kl	1
		24

Tabelle 7.3: Kruskal- und Prim-Algorithmus für den Graph in Abbildung rechts 7.7

An den Kruskal-Algorithmus angelehnt		
n	Kante	Gewicht
1	ac	8
2	cd	7
3	cf	6
4	fg	6
5	bd	4
6	be	3
		34

Tabelle 7.4: An den Kruskal-Algorithmus angelehnter Algorithmus zur Bestimmung des maximal aufspannenden Baums für den Graph links in Abbildung 7.7

Jetzt werden alle Kanten in diesem Baum verdoppelt und bereits durchlaufene Kanten werden übersprungen; dadurch erhält man den Hamiltonkreis $acdef$ mit Länge 15.

18. Bestimmen Sie die chromatische Zahl für den Graphen, der aus K_5 durch Entfernen einer beliebigen Kante entsteht, und für den Graphen $G(E, K)$ mit $E = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $K = \{(p,q) \in E^2 \mid q \equiv p + 1 \bmod n\}$.

    Lösung:
    K_5 ohne eine beliebige Kante hat die chromatische Zahl 4, wie Sie in Abbildung 7.10 erkennen können; der gierige Färbe-Algorithmus ergibt das ebenfalls sehr schnell, wenn Sie mit der Ecke oben beginnen, die immer noch Grad 4 hat.

    Die Graphen mit der Kantenmenge $K = \{(p,q) \in E^2 \mid q \equiv p + 1 \bmod n\}$ sind Kreise. Für gerades n haben Kreise die chromatische Zahl 2, für ungerades n 3.

19. Welche chromatische Zahl hat der Graph in Abbildung 7.11? Bestimmen Sie eine Färbung!

    Lösung:
    Es ist $\chi(G) = 4$. Eine Färbung kann mit dem gierigen Algorithmus bestimmt werden. Hier der Verlauf des Verfahrens:

    (a) $i = 1$, farbe $= 1$; $f(a) = 1$, dann wird $f(b) = f(c) = f(d) = f(e) = -1$.
    $f(f) = 1$, dann wird $f(g) = -1$.

    (b) $i = 2$, farbe $= 2$; $f(b) = 2$, dann wird $f(c) = -2$.
    $f(d) = 2$, dann wird $f(e) = f(g) = -2$.

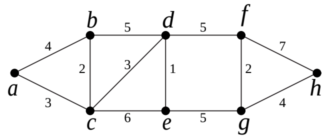


Abbildung 7.8: Der Graph für Aufgabe 15

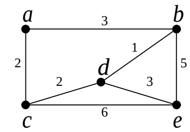


Abbildung 7.9: Der Graph für Aufgabe 17

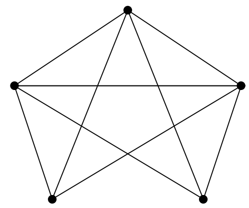


Abbildung 7.10: Der K_5 mit einer weggelassenen Kante

(c) $i = 3$, farbe $= 3$; $f(c) = 3$.
$f(e) = 3$, dann wird $f(g) = -3$.

(d) $i = 4$, farbe $= 4$; $f(g) = 4$.

20. Suchen Sie einen Graphen mit 30 Kanten, in dem jede Ecke Grad 5 hat, und bestimmen Sie seine chromatische Zahl!

Lösung:
Ein Graph mit 12 Ecken, die alle Grad 5 haben, erfüllt wegen

$$\sum_{i=1}^{12} d(u_i) = 2 \cdot 30$$

die Forderung.

Beispielsweise der Graph mit den Zusammenhangskomponenten $G = K_6 \cup K_6$; er hat die chromatische Zahl 6.

21. Bestimmen Sie für den bipartiten Graphen G in Abbildung 7.12 ein maximales Matching, ausgehend von dem eingezeichneten gesättigten Matching.

Lösung:
In Abbildung 7.13 sehen Sie nochmals die Ausgangssituation und das Endergebnis. Bei der Durchführung des Verfahrens und auch beim Nachvollziehen der Lösung ist es angebracht, den sukzessive in den Schritten 3 und 4 aufgebauten Wurzelbaum immer aufzuzeichnen. In der angegebenen Lösung finden Sie die Bäume nach einer Entscheidung in Schritt 4.

Das Ausgangsmatching M ist gesättigt. Im Schritt 2 des ungarischen Algorithmus ist $E(M) \cap S = \{a_2, a_3, a_4\}$. Als freie Ecke aus $S \setminus E(M)$ kann a_1 gewählt werden; dann ist $A = \{a_1\}$, $I = \emptyset$ und $T = \{a_1\}$.

Im Schritt 3 ist $N(A) = \{b_2\} \neq \emptyset$; und es kann $y = b_2$ gewählt werden. Im Schritt 4 für diese Wahl ist $z = a_2$ und $A = \{a_1, a_2\}$, $I = \{b_2\}$ und $E(T) = \{a_1, a_2, b_2\}$, $K(T) = \{a_1b_2, b_2a_2\}$.

Schritt 3 wird wiederum durchgeführt. Es ist $N(A) = \{b_2, b_3\} \neq I$. Wir wählen $y = b_3$ und die Kante a_2b_3. In Schritt 4 gibt es zu y eine inzidente Kante in M, nämlich a_3b_3. Dann ist $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $I = \{b_2, b_3\}$, $E(T) = \{a_1, a_2, a_3, b_2\}$, $K(T) = \{a_1b_2, b_2a_2, a_3b_2\}$. Wir gehen zurück zu Schritt 3.

Hier ist $N(A) = \{b_1, b_2, b_3\} \neq I$; als Ecke aus aus $N(A) \setminus I$ kann $y = b_1$ gewählt werden. Zu diesem y gibt es im Matching M keine inzidente Kante; also ist ein vergrößernder Weg gefunden.

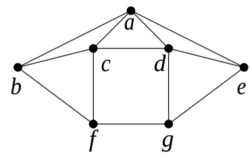


Abbildung 7.11: Der Graph für Aufgabe 19

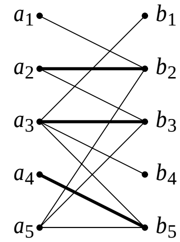
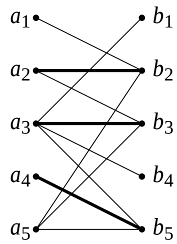


Abbildung 7.12: Der Graph für Aufgabe 21



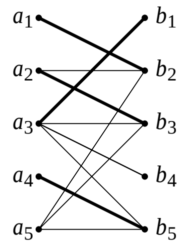


Abbildung 7.13: Ein maximales Matching für Abbildung 21, links die Ausgangssituation, rechts die Lösung

Es gibt ein neues Matching $M_1 = \{a_1b_2, a_2b_3, a_3b_1, a_4b_5\}$.

Wir sind zurück in Schritt 2 des ungarischen Algorithmus. Jetzt ist $E(M_1) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, und es gibt noch eine Ecke in S, nämlich a_5, die nicht im Matching liegt.

Also setzen wir $a = a_5$ als freie Ecke. Es ist $I = \emptyset$ und $A = \{a_5\}$; $N(A) = \{b_2, b_3, b_5\}$. Als Ecke y kann $y = b_2$ gewählt werden. Dazu gibt es in Schritt 4 eine inzidente Kante. Also wird der Baum erweitert, es ist $A = \{a_1, a_5\}$, $I = \{b_2\}$.

Zurück in Schritt 3 ist $N(A) = \{b_2, b_5\}$. Als Ecke y wird jetzt $y = b_5$ gewählt. Dann gibt es in Schrit 4 eine in M_1 inzidente Kante mit $z = a_4$, der Baum wird erweitert; $A = \{a_1, a_4, a_5\}$, $I = \{b_2, b_5\}$.

Zurück in Schritt 3 ist $N(A) = \{b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Als y kann $y = b_3$ gewählt werden. Auch hier gibt es in Schritt 4 eine inzidente Kante mit $z = a_2$. Dann ist $A = \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$ und $I = \{b_2, b_3, b_5\}$.

Zurück im Schritt 3 ist $N(A) = \{b_2, b_3, b_5\} = I$. Dann wird aber die Ecke $a = a_5$ aus S entfernt, und wir gehen zurück zu Schritt 2. Dort gilt jetzt $E(M_1) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, und der ungarische Algorithmus stoppt!

22. Für den bipartiten Graphen $G(E_1 \cup E_2, K)$ mit $E_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$, $E_2 = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8\}$ und $K = \{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2, a_3b_2, a_3b_5, a_4b_1, a_4b_2, a_5b_2, a_5b_3, a_5b_4, a_5b_6, a_5b_7, a_5b_8, a_6b_3, a_6b_4, a_6b_5, a_6b_6, a_6b_8, a_7b_5, a_7b_8\}$ ist $M = \{a_2b_1, a_4b_2, a_5b_7, a_6b_5\}$ ein gesättigtes Matching. Bestimmen Sie ein maximales Matching!

Lösung:
In Abbildung 7.14 finden Sie den bipartiten Graphen und das gegebene gesättigte Matching $M = \{a_2b_1, a_4b_2, a_5b_7, a_6b_5\}$. Bei der Durchführung des Verfahrens und auch beim Nachvollziehen der Lösung ist es angebracht, den sukzessive in den Schritten 3 und 4 aufgebauten Wurzelbaum immer aufzuzeichnen. In der angegebenen Lösung finden Sie die Bäume nach einer Entscheidung in Schritt 4.

In Schritt 2 des ungarischen Algorithmus ist $E(M) \cap E_1 = \{a_2, a_4, a_5, a_6\}$. Als freie Ecke aus $E_1 \setminus E(M)$ wird a_1 gewählt. In Schritt 3 ist $N(A) = \{b_1, b_2\} \neq \emptyset$, es kann $y = b_1$ gewählt werden. In Schritt 4 gibt es die zu $y = b_1$ inzidente Kante a_2b_1, also ist $z = a_2$, $A = \{a_1, a_2\}$, $I = \{b_1\}$, $E(T) = \{a_1, a_2, b_1\}$, $K(T) = \{a_1b_1, b_1a_2\}$. Mit diesem Wurzelbaum gehen wir zurück zu Schritt 3.

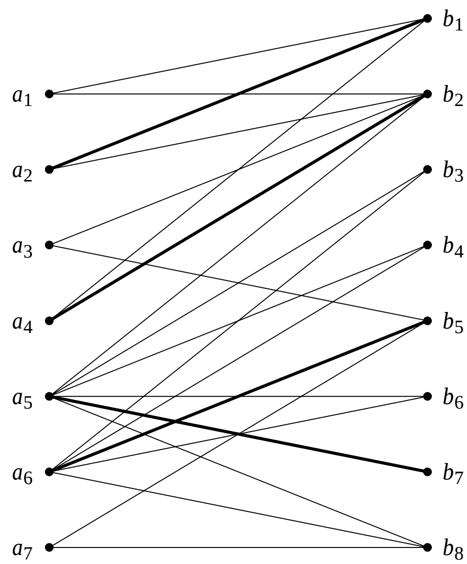


Abbildung 7.14: Der bipartite Graph für Aufgabe 22, das gegebene gesättigte Matching $\{a_2b_1, a_4b_2, a_5b_7, a_6b_5\}$ ist fett dargestellt

Es ist $N(A) = \{b_1, b_2\} \neq I$, also gibt es die Wahl $y = b_2 \notin N(A) \setminus I$. Wir wählen die Kante a_4b_2 und gehen damit zu Schritt 4. Es ist $A = \{a_1, a_2, a_4\}$ und $I = \{b_1, b_2\}$. In Abbildung 7.15 sehen Sie den dadurch entstandenen Wurzelbaum.

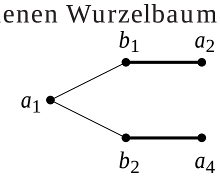


Abbildung 7.15: Der Wurzelbaum T nach dem zweimaligen Durchlaufen von Schritt 3 und 4 für den Ausgangsknoten a_1. Die im Matching enthaltenen Kanten des Baums sind fett dargestellt.

In Schritt 3 ist $N(A) = \{b_1, b_2\} = I$. Also setzen wir $S = S \setminus \{a_1\}$ und gehen zu Schritt 2 zurück. Es gibt keinen zunehmenden Weg.

In Schritt 2 wählen wir $a = a_3$; also ist $A = \{a_3\}$ und $I = \emptyset$, $N(A) = \{b_2, b_5\}$. In Schritt 3 wählen wir $y = b_2$ und $x = a_3$. In Schritt 4 ist $z = a_4$, insgesamt kann der Wurzelbaum erweitert werden, es ist $A = \{a_3, a_4\}$, $I = \{b_2\}$ und $N(A) = \{b_1, b_2, b_5\}$.

Zurück in Schritt 3 ist $y = b_1$ und $x = a_4$. Wieder in Schritt 4 gibt es $z = a_2$, damit ist $A = \{a_2, a_3, a_4\}$, $I = \{b_1, b_2\}$ und $N(A) = \{b_1, b_2, b_5\}$.

In Schritt 3 ist $N(A) \setminus I = \{b_5\}$, also $y = b_5$ und $x = a_3$. In Schritt 4 ist $z = a_6$, also $A = \{a_2, a_3, a_4, a_6\}$, $I = \{b_1, b_2, b_5\}$ und $N(A) = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_8\}$.

In Schritt 3 zurück ist $N(A) \setminus I = \{b_3, b_4, b_6, b_8\}$, $y = b_3$ und $x = a_6$ ist eine mögliche Wahl. In Schritt 4 gibt es für diese Wahl kein z mit einer zu b_3 inzidenten Kante in M. Abbildung 7.16 zeigt den ausgehend von $a = a_3$ aufgebauten Wurzelbaum. Wir haben einen vergrößernden Weg gefunden, die Kante a_6b_5 kann durch die beiden Kanten a_3b_5 und a_6b_3 ersetzt werden. Es ist dann $M = \{a_2b_1, a_3b_5, a_4b_2, a_5b_7, a_6b_3\}$.

Zurück in Schritt 2 ist jetzt $E(M) \cap E_1 = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, denn die Ecke a_1 steht ja nicht mehr zur Verfügung. Als neue Wurzel eines Baums steht nur noch a_7 zur Verfügung, dann ist $A = \{a_7\}$, $I = \emptyset$ und $N(A) = \{b_5, b_8\}$. In Schritt 3 wird $y = b_5$ und $x = a_7$ gewählt. Dann ist in Schritt 4 $z = a_3$ und $A = \{a_3, a_7\}$, $I = \{b_5\}$ und $N(A) = \{b_2, b_5, b_8\}$.

Zurück in Schritt 3 wird $y = b_2$ und $x = a_3$ gewählt. In Schritt 4 ist $z = a_4$ und $A = \{a_3, a_4, a_7\}$, $I = \{b_2, b_5\}$ und $N(A) = \{b_1, b_2, b_5, b_8\}$.

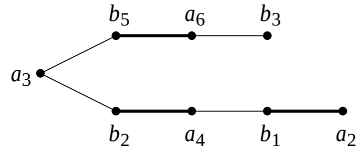


Abbildung 7.16: Der Wurzelbaum T für den Ausgangsknoten a_3. Die im Matching enthaltenen Kanten des Baums sind fett dargestellt.

Jetzt wird in Schritt 3 $y = b_1$ und $x = a_4$ gewählt. In Schritt 4 ist dann $z = a_2$ und $A = \{a_2, a_3, a_4, a_7\}$, $I = \{b_1, b_2, b_5\}$ und $N(A) = \{b_1, b_2, b_5, b_8\}$.

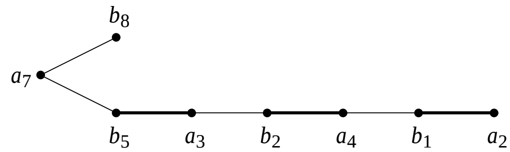


Abbildung 7.17: Der Wurzelbaum T für den Ausgangsknoten a_7. Die im Matching enthaltenen Kanten des Baums sind fett dargestellt.

In Schritt 3 ist $y = b_8$ und $x = a_7$. In Abbildung 7.17 finden Sie den Wurzelbaum nach Hinzufügen der Kante a_7b_8. Zu b_8 gibt es keine im aktuellen Matching inzidente Kante. Also ist a_7b_8 ein vergrößernder Weg, das dem Matching hinzugefügt werden kann.

Das Matching ist dann gegeben durch $M = \{a_2b_1, a_3b_5, a_4b_2, a_5b_7, a_6b_3, a_7b_8\}$.

Zurück in Schritt 2 ist $E(M) \cap E_1 = \emptyset$, denn die Ecke a_1 wurde ganz zu Beginn des Algorithmus gestrichen. Damit erfüllt das Matching M das Abbruchkriterium, ein maximales Matching ist gefunden! In Abbildung 7.18 ist der ganze bipartite Graph und das maximale Matching nochmals dargestellt!

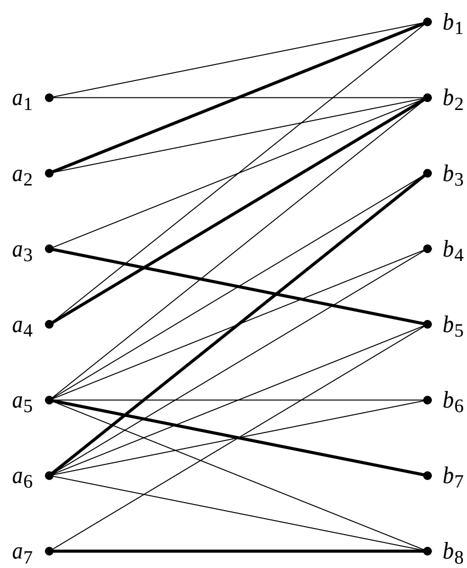


Abbildung 7.18: Der bipartite Graph für Aufgabe 22, das berechnete maximale Matching $\{a_2b_1, a_3b_5, a_4b_2, a_5b_7, a_6b_3, a_7b_8\}$ ist fett dargestellt