Kapitel 3

Logik

Verständnisfragen

Sachfragen

1. Was ist eine logische Aussage?
2. Wie ist die Konjunktion und die Disjunktion definiert?
3. Beschreiben Sie das Exklusive Oder, die Implikation und die Äquivalenz!
4. Wie ist der Peirce- und der Sheffer-Operator definiert?
5. Was ist eine Tautologie, was ein Widerspruch?
6. Wie können Sie für einen gegebenen logischen Ausdruck feststellen, ob er eine Tautologie oder ein Widerspruch darstellen?
7. Wann sind zwei logische Ausdrücke gleich?
8. Wie lauten die De Morgan'schen Regeln der Aussagenlogik?
9. Kann jeder logische Ausdruck durch einen Ausdruck ersetzt werden, der nur die Operatoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$ enthält? Gibt es eine analoge Aussage für den Sheffer- oder den Peirce-Operator?
10. Was ist ein Minterm?
11. Beschreiben Sie die disjunktive und die konjunktive Normalform eines logischen Ausdrucks!
12. Beschreiben Sie den Begriff des Karnaugh-Diagramms und seine Anwendung!
13. Was versteht man unter „SOPE"?
14. Was ist ein Prädikat?
15. Beschreiben Sie den All- und den Existenz-Quantor!
16. Beschreiben Sie die Negation von Prädikaten, die Quantoren beinhalten!
17. Was ist ein Gegenbeispiel?
18. Beschreiben Sie direkten Beweis!
19. Beschreiben Sie den Beweis durch Kontraposition!

20. Beschreiben Sie den Widerspruchsbeweis!
21. Beschreiben Sie den Beweis durch vollständige Induktion!

Methodenfragen

1. Verbale Aussagen in logische Ausdrücke umformen können.
2. Wahrheitstafeln für logische Ausdrücke aufstellen können.
3. Die Rechenregeln für logische Ausdrücke anwenden können.
4. Logische Ausdrücke mit $\neg$, $\vee$, $\wedge$, mit $\mid$ oder mit $\downarrow$ schreiben können.
5. Für eine gegebene Wahrheitstafel eine Normalform aufstellen können!
6. Eine Normalform mit Hilfe von Karnaugh-Diagrammen oder den Rechenregeln vereinfachen können!
7. Den Wahrheitswert von Prädikaten feststellen können.
8. Prädikate mit Quantoren aufbauen und lesen können.
9. Prädikate mit Quantoren negieren können.
10. Kleine und einfache Beweise selbst führen können.
11. Beweise nachvollziehen können.
12. Induktionsbeweise durchführen können.

Übungsaufgaben

1. Wie viele Aussagenverbindungen gibt es für zwei logische Aussagen? Beschreiben Sie alle möglichen Verbindungen mit Hilfe einer Wahrheitstafel!

   Lösung:
   Es gibt insgesamt $16 = 2^{2^n} = 2^4$ mögliche Aussagenverbindungen, denn es gibt 2^n Zeilen in der Wahrheitstafel. In Tabelle 3.1 finden Sie eine Zusammenstellung.

p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
f	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f
f	w	w	w	f	f	w	w	f	f	w	w	f	f	w	w	f	f
w	f	w	w	w	w	f	f	f	f	w	w	w	w	f	f	f	f
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	f	f	f	f	f	f	f	f

Tabelle 3.1: Sämtliche zweistellige Aussagenverbindungen

In der Tabelle 3.1 finden Sie die im Buch eingeführten, „klassischen" Aussageverbindungen wieder. f_8 ist die Konjunktion, f_2 die Disjunktion. f_5 ist die Implikation und f_7 die Äquivalenz und f_{10} ist das exklusive oder. f_9 ist der Sheffer-Operator, f_{15} der Peirce-Operator.

f_1 und f_{16} sind die beiden Konstanten w und f, also Tautologie und Widerspruch. f_4 und f_6 stimmen mit p bzw. mit q überein. f_3 ist die Implikation $q \Rightarrow p$, dieser Operator wird auch *Konversion* genannt. f_{12}, die Negation der Implikation, wird auch *Inhibition* genannt. Und f_{14} ist die Negation der Implikation $f_3 = (q \Rightarrow p)$.

2. Bestimmen Sie die Wahrheitstafel für $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ und $p \Rightarrow (q \Rightarrow (r \vee \neg p))$.

   Lösung:
   $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ ist eine Tautologie.
   $p \Rightarrow (q \Rightarrow (r \vee \neg p))$ hat die folgende Wahrheitstabelle:

p	q	r	$p \Rightarrow (q \Rightarrow (r \vee \neg p))$
f	f	f	w
f	f	w	w
f	w	f	w
f	w	w	w
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	f
w	w	w	w

3. Ist der Ausdruck $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$ eine Tautologie?

   Lösung:
   Der Ausdruck ist keine Tautologie. Wenn die Wahrheitswerte der Variablen p und q übereinstimmen ist der Ausdruck falsch.

4. Weisen Sie nach, dass $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow q$ eine Tautologie ist!

   Lösung:
   Der Nachweis kann über eine Wahrheitstafel wie in Tabelle 3.2 erfolgen:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)$	$((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow q$
f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w
w	w	w	w	w	w

Tabelle 3.2: Wahrheitstafel zu Aufgabe 4

5. Weisen Sie nach, dass das Distributivgesetz $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ gilt!

   Lösung:
   Der Nachweis erfolgt über die Wahrheitstafel 3.3.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
f	f	f	f	**f**	f	f	**f**
f	f	w	w	**f**	f	f	**f**
f	w	f	w	**f**	f	f	**f**
f	w	w	w	**f**	f	f	**f**
w	f	f	f	**f**	f	f	**f**
w	f	w	w	**w**	f	w	**w**
w	w	f	w	**w**	w	f	**w**
w	w	w	w	**w**	w	w	**w**

Tabelle 3.3: Die Wahrheitstafel zu Aufgabe 5

6. Weisen Sie nach, dass $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow q$ eine Tautologie ist!

   Lösung:
   Der Nachweis erfolgt über die Wahrheitstafel in Tabelle 3.4.

   Tabelle 3.4: Wahrheitstafel zu Aufgabe 6

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow q$
f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w
w	w	w	w	w	w

7. Für eine Wechselschaltung könnte die Wahrheitstafel 3.5 stehen. Stellen Sie diese Wechselschaltung mit $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ dar!

   Tabelle 3.5: Eine Wechselschaltung

p	q	x
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

   Lösung:
   Es gibt zwei Minterme, in disjunktiver Normalform ergibt sich dann $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$. Der Wahrheitsverlauf ist identisch mit der Äquivalenz $p \Leftrightarrow q$.

   Die konjunktive Normalform kann analog mit Mintermen aufgestellt werden. Statt den Zeilen, die im vorgeschriebenen Verlauf ein w enthalten verwendet man die Zeilen mit f, stellt die Minterme mit der Disjunktion auf und verbindet die Minterme mit der Konjunktion. Dann erhält man für die Wechselschaltung $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$.

8. Die Wahrheitstafel 3.6 enthält die vorgegebenen Wahrheitsverläufe für zwei logische Schaltungen a und b. Schreiben Sie beide logische Ausdrücke in konjunktiver und disjunktiver Normalform und bestimmen Sie eine SOPE-Darstellung!

   Tabelle 3.6: Zwei Schaltungen

p	q	r	a	b
f	f	f	f	w
f	f	w	w	w
f	w	f	f	w
f	w	w	f	f
w	f	f	f	f
w	f	w	w	f
w	w	f	f	f
w	w	w	w	f

   Tabelle 3.7: Eingangsgrößen für Aufgabe 12

A	B	C	D	Ziffer
f	f	f	f	0
f	f	f	w	1
f	f	w	f	2
f	f	w	w	3
f	w	f	f	4
f	w	f	w	5
f	w	w	f	6
f	w	w	w	7
w	f	f	f	8
w	f	f	w	9

   Lösung:
   Für die Schaltung a gibt es drei Minterme, also lautet die disjunktive Normalform

   $$a = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r).$$

   Die konjunktive Normalform lautet

   $$a = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r).$$

Als SOPE erhält man
$$a = (p \land r) \lor (r \land \neg q) = r \land (p \lor \neg q).$$

Die Normalformen für die Schaltung b lauten

$$\begin{aligned} b &= (\neg p \land \neg q \land \neg r) \lor (\neg p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land q \land \neg r) \\ &= (p \lor \neg q \lor \neg r) \land (\neg p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor q \lor \neg r) \land (\neg p \lor \neg q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r). \end{aligned}$$

Als SOPE erhält man
$$(\neg p \land \neg q) \lor (\neg p \land \neg r) = \neg p \land (\neg q \lor \neg r).$$

9. Schreiben Sie $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$ in disjunktiver und konjunktiver Normalform und stellen Sie eine SOPE-Darstellung auf!

   Lösung:
   Die Wahrheitstafel für den Ausdruck finden Sie in Tabelle 3.8. Damit können die gesuchten Normalformen aufgestellt werden.

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$
f	f	f	w	w	w	f	f
f	f	w	w	w	w	w	w
f	w	f	f	w	w	f	f
f	w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	w	w
w	f	w	w	f	w	w	w
w	w	f	f	w	f	f	w
w	w	w	w	w	w	w	w

Tabelle 3.8: Die Wahrheitstafel für Aufgabe 9

   Die disjunktive Normalform enthält 6 Minterme:

$$\begin{aligned} &(\neg p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land q \land r) \lor (p \land \neg q \land \neg r) \\ &\qquad \lor (p \land \neg q \land r) \lor (p \land q \land \neg r) \lor (p \land q \land r) \end{aligned}$$

   Die konjunktive Normalform besteht aus einem Minterm:

$$(p \lor r),$$

   damit ist auch eine SOPE gefunden.

10. In einem Auto soll ein Warnton den Fahrer darauf aufmerksam machen, dass das Licht eingeschaltet ist, obwohl der Zündschlüssel abgezogen und die Tür bereits geöffnet wurden. Entwerfen Sie eine Schaltung, die dieses Problem löst!

    Lösung:
    $L = w$ entspricht „Licht an“, $S = w$ entspricht „Schlüssel steckt“, $T = w$ entspricht „Tür ist geschlossen“ und $W = w$ entspricht „Warnton ertönt“. Dann ist W darzustellen als

$$W = L \land \neg S \land \neg T.$$

11. Eine Öldruckkontrolle soll für folgende zwei Fälle Gefahr signalisieren: der Motor läuft, es ist aber kein Öldruck vorhanden, oder der Motor läuft und die Öltemperatur ist zu hoch. Entwickeln Sie eine SOPE-Darstellung für einen logischen Ausdruck, der diese Kontrolle realisiert!

Lösung:
$m = w$ soll „Motor läuft" entsprechen, $d = w$ entspricht „Öldruck vorhanden" und $t = w$ soll für „Temperatur in Ordnung" stehen. Dann können Sie eine Wahrheitstafel für die drei Aussagen m, d und t und eine Normalform aufstellen; man erhält

$$f(m, d, t) = (m \wedge \neg d) \vee (m \wedge \neg t).$$

12. Mit dem BDC-7-Segment-Decoder in Abbildung 3.1 können die Ziffern 0 bis 9 durch Signale auf den Leitungen A, B, C und D dargestellt werden. Stellen Sie einen logischen Ausdruck auf, der die Darstellung der Ziffern ermöglicht und die Eingaben der Wahrheitstafel 3.7 verwendet!

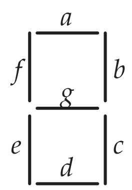

Abbildung 3.1: Ein 7-Segment-Decoder

Lösung:
Mit den logischen Ausdrücken

$$\begin{aligned}
z_0 &= \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D,\\
z_1 &= \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D,\\
z_2 &= \neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D,\\
z_3 &= \neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D,\\
z_4 &= \neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D,\\
z_5 &= \neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D,\\
z_6 &= \neg A \wedge B \wedge C \wedge \neg D,\\
z_7 &= \neg A \wedge B \wedge C \wedge D,\\
z_8 &= A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D,\\
z_9 &= A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D
\end{aligned}$$

erhalten Sie die Steuerung

$$\begin{aligned}
a &= \neg(z_1 \vee z_4),\\
b &= \neg(z_5 \vee z_6),\\
c &= \neg z_2,\\
d &= \neg(z_1 \vee z_4 \vee z_7),\\
e &= z_0 \vee z_2 \vee z_6 \vee z_8,\\
f &= \neg(z_1 \vee z_2 \vee z_3 \vee z_7),\\
g &= \neg(z_0 \vee z_1 \vee z_7).
\end{aligned}$$

13. Formulieren Sie die Peano-Axiome aus Kapitel 1 mit Hilfe von Prädikaten und Quantoren!

Lösung:

P1 $1 \in \mathbb{N}$.

P2 $\forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists n^+ \in \mathbb{N} \;\; (n^+ = n + 1)$.

P3 $\forall\, n \in \mathbb{N}\, (n^+ = 1 \Rightarrow n \notin \mathbb{N})$.

P4 $\forall\, m, n \in \mathbb{N} \;\; (m + 1 = n + 1 \Rightarrow m = n)$.

P5 $\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; ((p(1) \wedge (p(n) \Rightarrow p(n^+)) \Rightarrow p(n))$.

14. Formulieren Sie die Existenz eines inversen Elements für die Addition und Multiplikation von rationalen Zahlen mit Hilfe von Prädikaten und Quantoren!

    Lösung:
    Addition: $\forall\, p \in \mathbb{Q}\, \exists\, q \in \mathbb{Q} \;\; (p + q = 0)$.

    Multiplikation: $\forall\, p \in \mathbb{Q}, p \neq 0\, \exists\, q \in \mathbb{Q} \;\; (p \cdot q = 1)$.

15. Die folgenden Prädikate sind gegeben: $q(x) =$ „x ist durch zwei teilbar“, $s(x) =$ „x ist durch drei teilbar“, $t(x) =$ „x ist durch sechs teilbar“. Als Grundbereich soll immer $G = \mathbb{N}$ verwendet werden. Formulieren Sie die Aussagen

    $$\forall x\, (s(x) \Rightarrow q(x)), \forall x\, (t(x) \Rightarrow s(x)),$$
    $$\forall x\, ((q(x) \wedge s(x)) \Leftrightarrow t(x)), \forall x\, (\neg q(x) \wedge \neg s(x) \wedge \neg t(x))$$

    verbal und untersuchen Sie ihren Wahrheitswert. Bilden Sie auch die Negationen und formen Sie die negierten Ausdrücke so um, dass das Negationszeichen unmittelbar vor den Einzelaussagen steht!

    Lösung:
    $\forall x\, (s(x) \Rightarrow q(x))$: Jede natürliche Zahl, die durch 3 teilbar ist, ist auch durch 2 teilbar. Diese Aussage ist falsch, denn $x = 9$ ist zwar durch 3 teilbar, aber keine gerade Zahl.

    Die Negation davon ist $\exists x\, \neg(s(x) \Rightarrow q(x)) = \exists x\, (s(x) \wedge \neg q(x))$. Verbal: „es gibt eine natürliche Zahl, die durch 3 und nicht durch 2 teilbar ist“. Eine wahre Aussage, $x = 9$ beispielsweise macht das Prädikat wahr.

    $\forall x\, (t(x) \Rightarrow s(x))$: Jede natürliche Zahl, die durch 6 teilbar ist, ist auch durch 3 teilbar. Die Aussage ist richtig, im Abschnitt über die Beweisverfahren wurde diese Aussage bewiesen.

    Die Negation davon ist $\exists x\, \neg(t(x) \Rightarrow s(x)) = \exists x\, (t(x) \wedge \neg s(x))$. Verbal: „es gibt eine natürliche Zahl, die durch 6 und nicht durch 3 teilbar ist“. Eine offensichtlich falsche Aussage.

    $\forall x\, ((q(x) \wedge s(x)) \Leftrightarrow t(x))$: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 2 und 3 teilbar, wenn sie durch 6 teilbar ist. Die Aussage ist richtig; liegt an $6 = 2 \cdot 3$.

    Die Negation davon ist $\exists x\, \neg((q(x) \wedge s(x)) \Leftrightarrow t(x)) = \exists x\, (q(x) \wedge s(x)) \oplus t(x))$. Verbal: „es gibt eine natürliche Zahl, die entweder durch 2 und 3 oder durch 6 teilbar ist“. Eine falsche Aussage.

    $\forall x\, (\neg q(x) \wedge \neg s(x) \wedge \neg t(x))$: Jede natürliche Zahl ist nicht durch 2, 3 und 6 teilbar. Diese Aussage ist falsch, denn $6 \in \mathbb{N}$.

    Die Negation davon ist $\exists x\, \neg(\neg q(x) \wedge \neg s(x) \wedge \neg t(x)) = \exists x\, (q(x) \vee s(x) \vee t(x))$. Verbal: „es gibt eine natürliche Zahl, die durch 2 oder durch 3 oder durch 6 teilbar ist“. eine Wahre Aussage.

16. Bilden Sie die Negation der folgenden Aussagen: $\forall p, q \in \mathbb{Q}\, \exists\, r \in \mathbb{R} \;\; (p < r < q), \forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N} \;\; (n > x), \exists\, p \in \mathbb{Q} \;\; (p^2 = 2)$ und beschreiben Sie die Aussage und ihre Negation verbal.

    Lösung:
    $\forall p, q \in \mathbb{Q}\, \exists\, r \in \mathbb{R} \;\; (p < r < q)$: verbal ist diese Aussage „für alle rationalen Zahlen p und q gibt es eine reelle Zahl r mit $p < r < q$“. Eine wahre Aussage, beispielsweise können Sie r als das arithmetische Mittel von p und q setzen.

Die Negation davon ist $\exists\, p, q \in \mathbb{Q}\, \forall\, r \in \mathbb{R} \;\; \neg(p < r < q) = \exists\, p, q \in \mathbb{Q}\, \forall\, r \in \mathbb{R} \;\; (r \notin (p, q))$. Verbal: „es gibt zwei rationale Zahlen, sodass im Intervall (p, q) keine reelle Zahl liegt". Eine falsche Aussage.

$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N} \;\; (n > x)$: verbal ist dies Aussage „für jede reelle Zahl x gibt es eine natürliche Zahl, die größer als x ist". Eine wahre Aussage, die unter der Bezeichnung *Archimedes-Axiom* bekannt ist.

Die Negation davon ist $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} \;\; \neg(n > x) = \exists x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} \;\; (n <\leq x)$. Verbal: „es gibt eine reelle Zahl x, so dass alle natürlichen Zahlen kleiner oder höchstens gleich x sind". Eine falsche Aussage.

$\exists\, p \in \mathbb{Q} \;\; (p^2 = 2)$: verbal ist diese Aussage „es gibt eine rationale Zahl, deren Quadrat 2 ist". Eine falsche Aussage, die Tatsache, dass $\sqrt{2}$ irration ist war der Grund für die Einführung der reellen Zahlen.

Die Negation davon ist $\forall\, p \in \mathbb{Q} \;\; \neg(p^2 = 2) = \forall\, p \in \mathbb{Q} \;\; (p^2 \neq 2)$. Eine wahre Aussage!

17. Beweisen Sie $a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$.

    Lösung:
    Der Beweis kann direkt geführt werden:

    $$\frac{(a+b)^2}{4} - ab = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0.$$

    Quadrate sind immer positiv!

18. Beweisen Sie durch einen direkten und einen indirekten Beweis, dass das Produkt zweier ungerader Zahlen ungerade ist.

    Lösung:
    Direkter Beweis:

    Für zwei ungerade Zahlen $2n + 1$ und $2m + 1$ multiplizieren Sie einfach aus: $(2n + 1)(2m + 1) = 2(2nm + n + m) + 1$. Das Ergebnis ist offensichtlich wieder eine ungerade Zahl.

    Indirekter Beweis:

    Angenommen, es gibt zwei ungerade Zahlen $2n + 1$ und $2m + 1$, deren Produkt gerade ist. Dann gibt es eine natürliche Zahl k mit $(2n + 1)(2m + 1) = 2k$. Multiplizieren Sie die Klammern auf der linken Seite aus, dann erhalten Sie die Gleichung $2(2nm + n + m) = 2k - 1$, ein Widerspruch.

19. Beweisen Sie $2^n < n!$ für $n > 3$.

    Lösung:
    Die Induktionsbasis ist $n = 4$: $2^4 = 16 < 4! = 24$. Der Induktionsschritt folgt aus $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 < 2n! < (n+1)n! = (n+1)!$.

20. Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Aussagen $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n}(4i - 2) = 2n^2$.

    Lösung:
    Der Induktionsschritt für die erste Aussage kann geführt werden als

    $$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

    Die zweite Behauptung folgt mit dem Induktionsschritt

    $$\sum_{i=1}^{n+1}(4i - 2) = 2n^2 + (4(n+1) - 2) = 2n^2 + 4n + 2 = 2(n^2 + 2n + 1) = 2(n+1)^2.$$