Kapitel 4

Relationen und Abbildungen

Verständnisfragen

Sachfragen

1. Was ist eine Relation?
2. Beschreiben Sie die Komposition von Relationen!
3. Was ist eine inverse Relation?
4. Was versteht man unter einer identischen Relation?
5. Was ist eine Äquivalenzrelation?
6. Erläutern Sie die Eigenschaften reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch und transitiv einer Relation! Nennen Sie Beispiele!
7. Was ist eine Partition?
8. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Partitionen und Äquivalenzrelationen!
9. Was ist eine teilgeordnete Menge?
10. Was ist eine strikte Teilordnung?
11. Erläutern Sie den Begriff der oberen bzw. unteren Schranke und des Supremums und Infimums!
12. Was ist ein minimales und was ist ein maximales Element einer teilgeordneten Menge?
13. Was versteht man unter einer verträglichen Ordnung in einer teilgeordneten Menge?
14. Was ist eine topologische Sortierung?
15. Was ist eine Abbildung?
16. Was ist eine Funktion?
17. Erläutern Sie die Eigenschaft rechtseindeutig für eine Relation!
18. Was ist der Graph einer Funktion?
19. Was ist ein Definitions- und ein Wertebereich?

20. Was ist das Bild einer Abbildung?
21. Erläutern Sie die Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv von Abbildungen!
22. Was ist eine inverse Abbildung? Wann existiert sie?
23. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Relationen, Abbildungen und Datenbanken!
24. Wann sind zwei Mengen gleichmächtig?
25. Was ist eine abzählbare Menge?
26. Was beschreibt das Symbol $\aleph_0$?
27. Wie kann nachgewiesen, dass $\mathbb{Z}$ abzählbar ist?
28. Wie kann nachgewiesen, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist?
29. Wie kann nachgewiesen, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist?
30. Erläutern Sie das Cauchy'sche Diagonalisierungsschema!
31. Erläutern Sie das Cantor'sche Diagonalisierungsschema!
32. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Mengen und Abbildungen!
33. Wie kann nachgewiesen werden, dass die Menge aller Algorithmen abzählbar ist?
34. Wie kann nachgewiesen werden, dass die Menge aller totalen Abbildungen $f : M^* \to M^*$ überabzählbar ist?
35. Gibt es nicht-berechenbare Funktionen?

Methodenfragen

1. Die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten für Relationen anwenden können.
2. Die Komposition von Relationen bilden können.
3. Für eine gegebene Relation entscheiden können, welche Eigenschaften sie hat.
4. Für eine gegebene Äquivalenzrelation die Äquivalenzklassen bilden können.
5. Entscheiden können, ob eine Äquivalenz- oder Ordnungsrelation vorliegt.
6. Ein kartesisches Produkt lexikographisch anordnen können.
7. Elemente aus M^* für ein gegebenes Alphabet lexikographisch anordnen können.
8. Supremum, Infimum, minimale und maximale Elemente einer teilgeordneten Menge bestimmen können.
9. Das Hasse-Diagramm einer teilgeordneten Menge konstruieren können.
10. Für eine teilgeordnete Menge eine topologische Sortierung bestimmen können.
11. Definitions- und Wertebereich einer Abbildung bestimmen können.
12. Werte einer gegebenen Abbildung und insbesondere einer Funktion bestimmen können.
13. Abbildungen und insbesondere Funktionen verketten können.
14. Den Graphen einer Abbildung und insbesondere einer Funktion darstellen können.

15. Feststellen können, ob eine gegebene Abbildung bzw. Funktion injektiv und / oder surjektiv ist.

16. Für eine bijektive Abbildung die inverse Abbildung angeben können.

17. Die inverse Funktion einer bijektiven Verkettung von Funktionen bilden können.

18. Projektion, Restriktion und Verbund für gegebene Relationen bilden können.

19. Für eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ nachweisen können, dass sie abzählbar ist.

20. Funktionswerte der Funktion $\phi: M^* \to \mathbb{N}$ für ein gegebenes Alphabet berechnen können.

Übungsaufgaben

1. Stellen Sie die Relation $R = \{(1,2), (1,5), (1,6), (2,2), (2,4), (3,4), (3,6), (4,6), (5,5)\}$ auf $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ als Pfeildiagramm, als Tabelle, als gerichteter Graph und als binäre Matrix dar!

   Lösung:
   Die Darstellung als binäre Matrix ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   In Tabelle 4.1 sehen Sie die Tabellendarstellung; in den Abbildungen 4.1 und 4.2 die Pfeildarstellung und der gerichtete Graph.

x	y
1	2
1	5
1	6
2	2
2	4
3	4
3	6
4	6
5	5

Tabelle 4.1: Die Tabellendarstellung zur Aufgabe 1

2. Bilden Sie für $R_1 = \{(a,b), (a,c)\}$ und $R_2 = \{(b,d), (c,a)\}$ die Kompositionen $R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$ und $R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$!

   Lösung:
   $R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = \{(d,a), (a,a)\}$, $R_1^{-1} \circ R_2^{-1} = \{(b,c), (c,c)\}$.

3. Ist für reflexive Relationen $R_1, R_2 \subset M^2$ die Komposition $R_1 \circ R_2 \subset M^2$ reflexiv? Beweisen Sie, dass für reflexive Relationen $R \subset R \circ R$ gilt!

   Lösung:

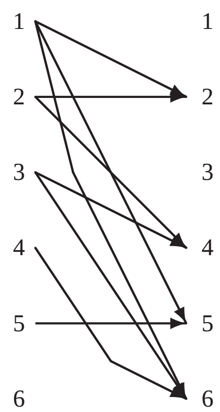


Abbildung 4.1: Das Pfeildiagramm zur Aufgabe 1

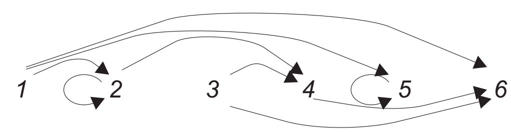


Abbildung 4.2: Der gerichtete Graph zur Aufgabe 1

Wenn beide Relationen reflexiv sind, dann ist $(x, x) \in R_1$ und $(x, x) \in R_2$ für alle $x \in M$. Zu zeigen ist, dass auch $\forall\, x \in M \quad (x, x) \in R_2 \circ R_1$ gilt. Das folgt aber aus der Definition der Komposition.

Für $(x, y) \in R$ müssen Sie $(x, y) \in R \circ R$ nachweisen. R ist reflexiv, also ist $(x, x) \in R$. Mit $(x, y) \in R$ folgt dann $(x, y) \in R \circ R$.

4. Ist die Aussage $R \circ R \subseteq R$ äquivalent zur Definition einer transitiven Relation?

   Lösung:
   Wenn Sie aufschreiben, was $R \circ R \subseteq R$ bedeutet, steht da die Definition der Transitivität!

5. Geben Sie sämtliche Partitionen der Menge $M = \{9, 12, 21\}$ an. Weisen Sie nach, dass $R = \{(x, y) \in M^2 \mid x \text{ hat die gleiche Quersumme wie } y\}$ eine Äquivalenzrelation ist, und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen!

   Lösung:
   Die möglichen Partitionen sind $K_1 = \emptyset, K_2 = M; K_1 = \{9\}, K_2 = \{12\}, K_3 = \{21\}; K_1 = \{9\}, K_2 = \{12, 21\}; K_1 = \{12\}, K_2 = \{9, 21\}; K_1 = \{21\}, K_2 = \{9, 12\}$.

   Dass die angegebene Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, können Sie leicht nachrechnen. Die Äquivalenzklassen sind $[9] = \{9\}, [12] = \{12, 21\}$.

6. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen, wenn M die Menge aller Menschen und W die Menge aller Wassertürme in Deutschland darstellt? $R_m = \{(x, y) \in M^2 \mid x \text{ ist am gleichen Tag wie } y \text{ geboren}\}$, $R_{10} = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n + m = 10\}$, $R_w = \{(x, y) \in W^2 \mid x \text{ ist höher als } y\}$.

   Lösung:
   R_m ist eine Äquivalenzrelation.

   R_{10} ist keine Äquivalenzrelation, denn sie ist nicht reflexiv, $(4, 4) \notin R_{10}$.

   R_w ist keine Äquivalenzrelation, sie enthält überhaupt kein Paar (x, x).

7. Die Relation $R \subset \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ soll gegeben sein durch $((a, b), (c, d)) \in R \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$. Ist R eine Äquivalenzrelation?

   Lösung:
   Reflexivität: ist $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ ein Paar von natürlichen Zahlen, dann ist $((a, b), (a, b)) \in R$, denn es ist $a \cdot b = b \cdot a$.

Symmetrie: falls $((a,b),(c,d)) \in R$, dann ist $a \cdot d = b \cdot c$. Dann ist auch $c \cdot b = d \cdot a$, und $((c,d),(a,b)) \in R$.

Transitivität: falls $((a,b),(c,d)) \in R$ und $((c,d),(e,f)) \in$, dann muss nachgewiesen werden, dann auch $((a,b),(e,f)) \in R$.

Es ist $a \cdot d = b \cdot c$ und $c \cdot f = d \cdot e$; damit gilt auch

$$b = \frac{a \cdot d}{c}, f = \frac{d \cdot e}{c}.$$

Dann gilt

$$a \cdot f = a\frac{d \cdot e}{c} = \frac{a \cdot d}{c} \cdot e = b \cdot e.$$

Damit ist R eine Äquivalenzrelation.

8. Welche der folgenden Mengen von Teilmengen von $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ ist eine Partition: $T_1 = \{\{1,2\},\{2,3,4\},\{4,5,6\}\}$, $T_2 = \{\{1\},\{2,3,6\},\{4\},\{5\}\}$, $T_3 = \{\{2,4,6\},\{1,3,5\}\}$, $T_4 = \{\{1,4,5\},\{2,6\}\}$?

   Lösung:
   T_1 ist keine Partition, denn $\{1,2\} \cap \{2,3,4\} = \{2\} \neq \emptyset$.

   T_2 und T_3 sind Partitionen, die Teilmengen sind disjunkt, als Vereinigung erhalten Sie M.

   T_4 ist keine Partition; die Teilmengen sind zwar disjunkt, aber in der Vereinigung fehlt das Element $3 \in M$.

9. Welche der folgenden durch binäre Matrizen gegebenen Relationen sind Teilordnungen?

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 1&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&0 \\ 1&1&1 \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 1&0&1&0 \\ 0&1&1&0 \\ 0&0&1&1 \\ 1&1&0&1 \end{pmatrix}.$$

   Lösung:
   Alle drei Relationen sind reflexiv, denn auf der Diagonalen steht 1.

   R_1 ist nicht antisymmetrisch, denn sowohl das Element 23 und 32 der Matrix ist Null. Also kann R_1 keine Teilordnung sein. Auch R_3 ist nicht antisymmetrisch, da sowohl das Element 12 als auch das Element 21 der Matrix 0 ist. R_2 ist antisymmetrisch; denn für ein Element a_{ij} der binären Matrix mit $i \neq j$ mit $a_{ij} = 0$ ist $a_{ji} = 1$ bzw. für $a_{ij} = 1$ ist $a_{ji} = 0$.

   R_2 ist auch transitiv; es gilt $R_2 \circ R_2 = R_2$. Damit ist R_2 eine Teilordung.

10. Beweisen Sie, dass für die teilgeordnete Menge (M,R) auch (M,R^{-1}) eine teilgeordnete Menge ist.

    Lösung:
    Wenn R reflexiv ist, dann ist auch R^{-1} reflexiv. Auch die Antisymmetrie für R^{-1} ist klar, wenn R antisymmetrisch ist; und mit dem gleichen Argument ist R^{-1} transitiv, wenn R diese Eigenschaft hat.

11. Es sei $S = \{1,2,3,4\}$. Als Ordnung sei die lexikographische Ordnung mit $\leq$ auf S^2 gegeben. Finden Sie alle Paare in S^2, die kleiner als $(2,3)$ oder größer als $(3,1)$ sind!

    Lösung:
    Kleiner als $(2,3)$ sind alle Paare, die als erste Komponente eine 1 haben, und die beiden Paare $(2,1)$ und $(2,2)$.

    Größer als $(3,1)$ sind alle Paare, deren erste Komponente größer als 3 sind, und die Paare $(3,2),(3,3),(3,4)$.

12. Ordnen Sie die Bitstrings 0, 01, 11, 001, 010, 011, 0001 und 0101 lexikographisch an, mit der Teilordnung $0 < 1$ für ein Bit!

    Lösung:
    Es ist $0 < 0001 < 001 < 01 < 010 < 0101 < 011 < 11$.

13. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm für die Teilbarkeit ohne Rest auf den Mengen $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $M_2 = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, $M_3 = \{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48\}$ und $M_4 = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$!

    Lösung:
    Die Diagramme finden Sie in Abbildung 4.3.

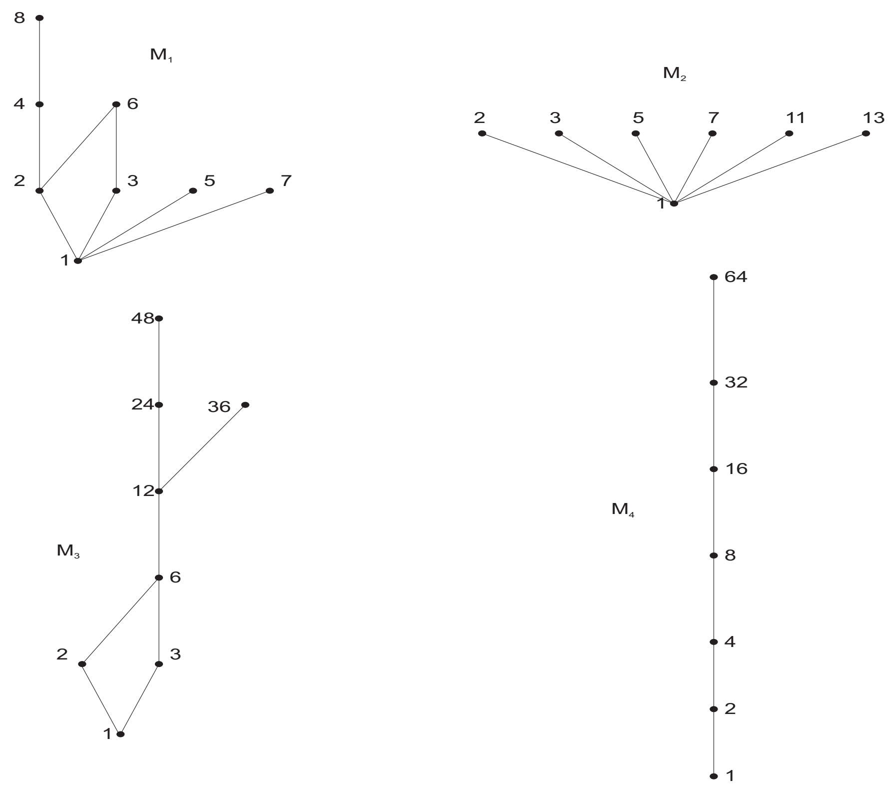


Abbildung 4.3: Die Hasse-Diagramme für Aufgabe 13

14. Gegeben ist die teilgeordnete Menge $(\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}, |)$. Geben Sie die maximalen und minimalen Elemente an! Geben Sie alle oberen Schranken für die Teilmenge $\{3, 5\}$ und das Supremum an, falls es existiert. Bestimmen Sie die unteren Schranken der Teilmenge $\{15, 45\}$ und das Infimum, falls es existiert.

    Lösung:
    24 und 45 sind maximale Elemente, 3 und 5 minimale Elemente.

    15 und 45 sind obere Schranken für $\{3, 5\}$. Das Supremum ist 15.

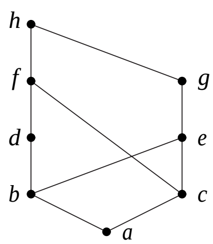
    15, 5 und 3 sind untere Schranken für $\{15, 45\}$, das Infimum ist 15.

15. Für eine Menge M und ihre Potenzmenge $\mathbb{P}(M)$ sollen die Teilmengen $A, B \subseteq M$ betrachten werden. Begründen Sie, dass $A \cap B$ das Infimum und $A \cup B$ das Supremum von $\{A, B\} \in \mathbb{P}(M)$ ist!

Lösung:
$A \cap B$ ist sicher eine untere Schranke für $\{A, B\}$, denn es ist $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$. Angenommen, es gibt eine untere Schranke, also eine Teilmenge $U \in \mathbb{P}(M)$ mit $A \cap B \subset U$ und $U \subseteq A$, $U \subseteq B$. Es soll also ein $x \in U$ geben, das nicht in $A \cap B$ liegt, aber in beiden Mengen A und B. Dann muss es im Schnitt liegen, ein Widerspruch. Also ist der Durchschnitt $A \cap B$ das Infimum.

Analog wird für $A \cup B$ argumentiert. Die Vereinigung ist sicher eine obere Schranke für $\{A, B\}$. Und es kann keine kleinere obere Schranke geben; eine Annahme kann zum Widerspruch geführt werden.

16. Bestimmen Sie eine topologische Sortierung für die teilgeordnete Mengen in 4.17 und 4.4!



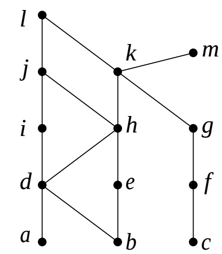


Abbildung 4.4: Hasse-Diagramme für Aufgabe 16

Lösung:
Für die Teilordnung aus Abbildung 4.17 gibt es keine eindeutige topologische Sortierung; eine Möglichkeit ist $a, c, b, e, d, g, f, h, j$. Den Verlauf für diese Lösung sehen Sie in Abbildung 4.5.

Für die linke Teilordnung in Abbildung 4.4 ist eine topologische Sortierung gegeben durch a, b, d, c, e, g, f, h. Den Verlauf für diese Lösung sehen Sie in Abbildung 4.6.

Für die rechte Teilordnung in Abbildung 4.4 ist eine topologische Sortierung gegeben durch $c, f, g, a, b, e, d, i, h, j, k, l, m$. Den Verlauf für diese Lösung sehen Sie in Abbildung 4.7.

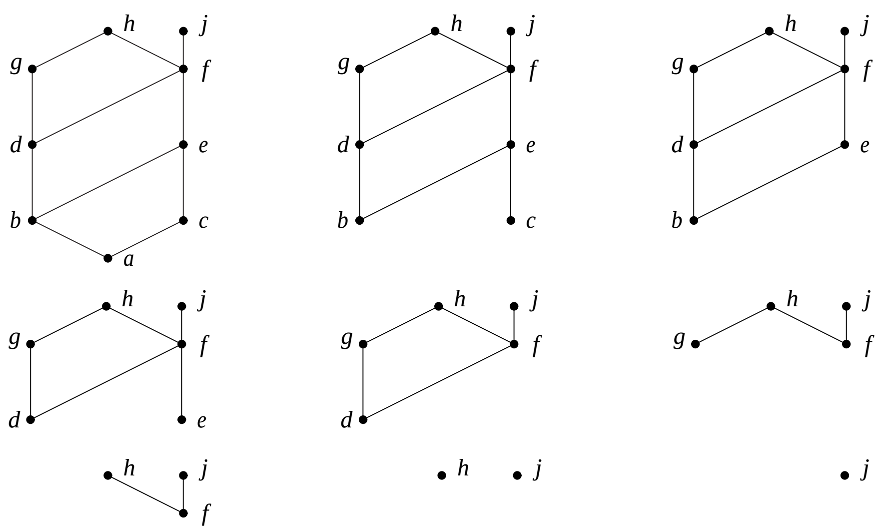


Abbildung 4.5: Lösung für die Teilordnung aus Abbildung 4.17 im Buch

17. M sei die Menge aller Bitfolgen. Welche der folgenden Relationen aus $M \times \mathbb{N}$ ist eine Abbildung: $f_1(x)$ ist die Position einer 0 in x; $f_2(x)$ ist die Anzahl der 1 in x, $f_3(x)$ ist die kleinste natürliche Zahl i, sodass das i-te Bit eine 1 ist; dabei wird für das leere Wort $f_3(\epsilon) = 0$ gesetzt.

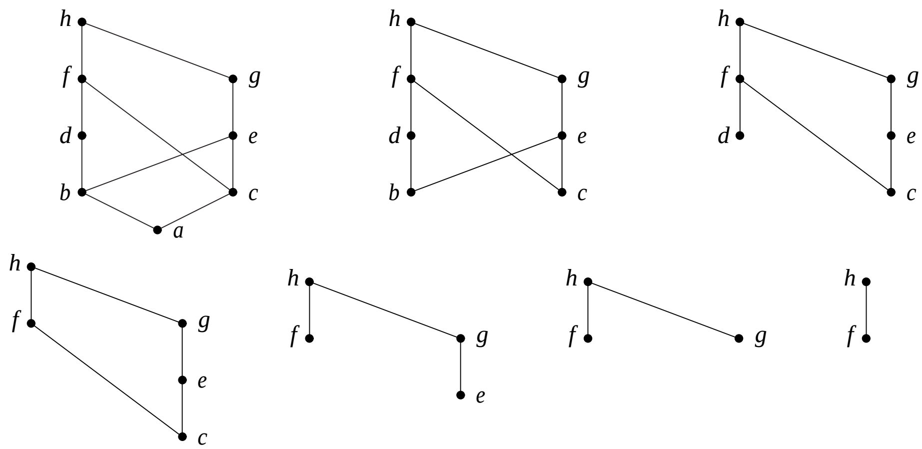


Abbildung 4.6: Lösung für die Teilordnung aus Abbildung 4.4 links

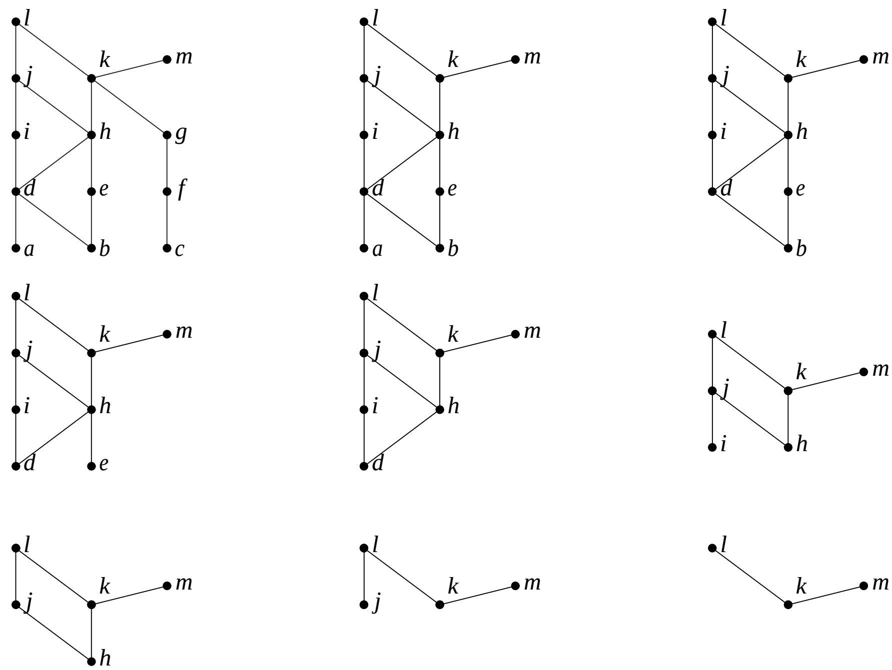


Abbildung 4.7: Lösung für die Teilordnung aus Abbildung 4.4 rechts

Lösung:
f_1 ist keine Abbildung; für die Bitfolge 1010 gibt es den Wert 2 und den Wert 4.

f_2 ist eine Abbildung; sie ist eine rechtseindeutige Relation.

f_3 ist eine Abbildung, denn sie ist eine rechtseindeutige Relation. Allerdings gibt es Bitfolgen, für die es keine Werte gibt wie beispielsweise 00.

18. Geben Sie die folgenden Werte an: $\lfloor 1,1 \rfloor$, $\lceil \frac{3}{4} \rceil$, $\lfloor \frac{1}{2} + \lceil \frac{1}{2} \rceil \rfloor$ und $\lfloor \frac{1}{2} \cdot \lfloor \frac{5}{2} \rfloor \rfloor$. Weisen Sie die folgenden Eigenschaften nach: $\lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$, $\lceil x+m \rceil = \lceil x \rceil + m$ für $m \in \mathbb{Z}$.

Lösung:
Die gesuchten Werte sind

$$\lfloor 1,1 \rfloor = 1 = \lceil \frac{3}{4} \rceil, \lfloor \frac{1}{2} + \lceil \frac{1}{2} \rceil \rfloor = \lfloor \frac{1}{2} + 1 \rfloor = 1, \lfloor \frac{1}{2} \cdot \lfloor \frac{5}{2} \rfloor \rfloor = \lfloor \frac{1}{2} \cdot 1 \rfloor = 0.$$

$\lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$:

Angenommen, es ist $\lfloor x \rfloor = n \in \mathbb{Z}$. Dann ist die Ungleichung $n \le x < n+1$ erfüllt. Wenn Sie zu dieser Ungleichungskette m addieren, erhalten Sie

$$n+m \le x+m < n+m+1.$$

Dann ist aber offensichtlich $\lfloor x+m \rfloor = n+m = \lfloor x \rfloor + m$.

$\lceil x+m \rceil = \lceil x \rceil + m$:

Angenommen, es ist $\lceil x \rceil = n \in \mathbb{Z}$. Dann ist die Ungleichung $n-1 < x \le n$ erfüllt. Wenn Sie zu dieser Ungleichungskette m addieren, erhalten Sie

$$n+m-1 < x+m \le n+m.$$

Dann ist aber offensichtlich $\lceil x+m \rceil = n+m = \lceil x \rceil + m$.

19. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität: $f_1(n) = n-1$, $f_2(n) = n^2+1$, $f_3(n) = n^3$, $f_4(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

    Lösung:
    f_1 ist bijektiv. Sie ist injektiv, aus $f(n) = f(m)$ folgt $n-1 = m-1$ und damit $n = m$. Sie ist surjektiv, denn für $m \in \mathbb{Z}$ ist das Urbild gegeben durch $m+1$: $f(m+1) = m$.

    f_2 ist weder injektiv noch surjektiv. Sowohl n als auch $-n \in \mathbb{Z}$ haben das gleiche Bild $f_2(n) = f_2(-n) = n^2+1$. Alle ganze Zahlen kleiner als 1 haben kein Urbild, denn es ist $n^2+1 \ge 1$.

    f_3 ist injektiv, denn aus $f_3(n) = f_3(m)$ folgt $n^3 = m^3$ und auch $n = m$. Sie ist nicht surjektiv, für 2 gibt es keine ganze Zahl mit $n^3 = 2$.

    f_4 ist nicht injektiv, denn es gilt $f_4(1) = \lceil \frac{1}{2} \rceil = 1 = \lceil \frac{2}{2} \rceil = f_4(2)$. f_4 ist surjektiv. Für $m \in \mathbb{Z}$ ist das Urbild gegeben durch $2m$.

20. Bestimmen Sie für die reellen Funktionen $f(x) = x+1, g(x) = 2x$ und $h(x) = x^2$ die Verkettungen $f \circ g, f \circ h, g \circ f, g \circ h, h \circ f$ und $h \circ g$!

    Lösung:
    Es gilt

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= 2x+1, \\
(f \circ h)(x) &= x^2+1, \\
(g \circ f)(x) &= 2(x+1), \\
(g \circ h)(x) &= 2x^2, \\
(h \circ h)(x) &= (x+1)^2, \\
(h \circ g)(x) &= 4x^2.
\end{aligned}$$

21. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f_1(x) = \lfloor 2x \rfloor$, $f_2(x) = \lceil \frac{x}{2} \rceil$, $f_3(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, $f_4(x) = \lfloor 2x \rfloor \cdot \lceil \frac{x}{2} \rceil$.

    Lösung:
    Die Graphen finden sie in Abbildung 4.8.

22. Finden Sie für $f(x) = \lfloor x \rfloor$ die folgenden Bilder der inversen Funktion: $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(\{-1; 0, 1\})$, $f^{-1}(\{x \,|0 < x < 1\})$.

    Lösung:
    $f^{-1}(0) = [0; 1)$; $f^{-1}(\{-1; 0, 1\}) = [-1; 2)$; $f^{-1}(\{x \,|0 < x < 1\}) = \emptyset$.

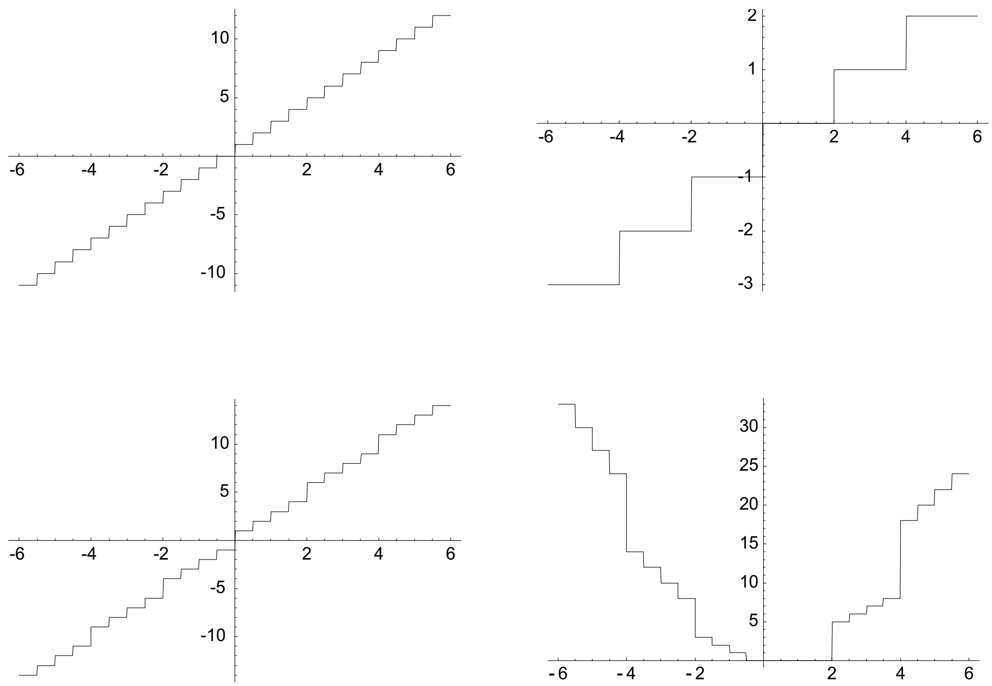


Abbildung 4.8: Die Graphen für Abbildung 21. Oben links f_1, oben rechts f_2, unten links f_3, unter rechts f_4

23. Geben Sie an, welche der folgenden Mengen abzählbar ist, und geben Sie die Zuordnung zwischen $\mathbb{N}$ und den abzählbaren Mengen an: die negativen ganzen Zahlen, die ungeraden natürlichen Zahlen, die reellen Zahlen zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ und alle ganzen Zahlen, die ein Vielfaches von 7 sind.

    Lösung:
    Die negativen ganzen Zahlen sind abzählbar; die Zuordnung ist einfach gegeben durch $-n$ für $n \in \mathbb{N}$. Auch die ungeraden Zahlen sind abzählbar; sie sind eine Teilmenge einer abzählbaren Menge. Die Zuordnun ist gegeben durch $2n + 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

    Die reellen Zahlen zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ sind überabzählbar; die Diagonalisierung kann genauso wie im Fall $[0; 1]$ durchgeführt werden.

    Alle Vielfachen von 7 sind abzählbar. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, und mit $7z$ für $z \in \mathbb{Z}$ ist eine Zordnung gegeben.

24. Bestimmen Sie die Funktionswerte der Abbildung $\phi : M^* \to \mathbb{N}$ für das Alphabet $M_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ für die folgenden Worte: $w_1 = 55$, $w_2 = 101$, $w_3 = 999$. Bestimmen Sie für das Alphabet $M_2 = \{0, 1\}$ die Funktionswerte für die folgenden Worte: $w_4 = 0101$, $w_5 = 00011$, $w_6 = 111000$.

    Lösung:
    $\phi(w_1) = 6 \cdot 11 + 6 \cdot 121 = 792.$

    $\phi(w_2) = 2 \cdot 11 + 1 \cdot 11^2 + 2 \cdot 11^3 = 2\,805.$

    $\phi(w_3) = 10 \cdot 11 + 10 \cdot 11^2 + 10 \cdot 11^3 = 14\,630.$

    $\phi(w_4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 = 210.$

    $\phi(w_5) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^5 = 687.$

    $\phi(w_6) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^6 = 1\,131.$